TD Notations n°2

Couplages

I. Couplages généraux.

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On nomme S l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes. L'ensemble A est formé de sous-ensembles de taille 2[1] $\{x, y\}$, représentant l'arête $x - y$. Pour une partie $A' \subseteq A$, on notera $\sigma(A') = \bigcup_{a \in A'} a$.

On supposera que G est *sans point isolé* : $\sigma(A) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{a \in A} a = S$.

I.1. Recouvrement par sommets.

Définition. Un *stable* de G est une partie S' de S ne contenant aucune paire de sommets adjacents :

$$\forall a \in A, \quad \operatorname{card}(a \cap S') \leq 1.$$

Le cardinal maximum d'un stable de G est noté $\alpha(G)$.

Définition. Un *transversal* de G est une partie T de S contenant un sommet adjacent à toute arrête :

$$\forall a \in A, \quad \operatorname{card}(a \cap T) \geq 1.$$

Le cardinal minimum d'un transversal de G est noté $\beta(G)$.

Q1. Démontrer les assertions suivantes :
(1) S' est un stable *ssi* $S \setminus S'$ est un transversal ;
(2) $\alpha(G) + \beta(G) = \operatorname{card}(S)$.

I.2. Recouvrement par arêtes.

Définition. Un *couplage* de G est une partie C de A ne contenant aucune paire d'arêtes adjacentes :

$$\forall a, a' \in C, \quad a \neq a' \implies a \cap a' = \emptyset$$

Le cardinal maximum d'un couplage de G est noté $\alpha'(G)$.

Définition. Un *recouvrement* de G est une partie R de A contenant une arête adjacente à tout sommet :

$$\sigma(R) = S.$$

Le cardinal minimum d'un recouvrement de G est noté $\beta'(G)$.

Q2. Prouver l'encadrement $2\,\alpha'(G) \leq \operatorname{card} S \leq 2\,\beta'(G)$.

Q3. (1) Si C est un couplage de cardinal maximal, prouver que $S \setminus \sigma(C)$ est un stable.
(2) Si R est un recouvrement de cardinal minimal, prouver que toute arête de R admet au moins un sommet qui n'est adjacent qu'à une seule arête de R.
(3) Prouver l'encadrement $\alpha'(G) + \beta'(G) = \operatorname{card} S$.

Définition. Un couplage est *parfait* s'il est en même temps un recouvrement.

Q4. Prouver que G admet un couplage parfait *ssi* $2\,\alpha'(G) = \operatorname{card} S = 2\,\beta'(G)$.

[1] On accepte aussi que ce sous-ensemble soit de taille 1 pour représenter l'arête $x - x$ pour un sommet x. Dans ce TD, on ne se placera pas dans ce cas.

I.3. Augmentations.

On considère G un graphe muni d'un couplage C.

Définition. Un sommet est *couplé* s'il est une des extrémités de a, pour $a \in C$.

Définition. Une *chaîne alternée* relativement au couplage est une suite finie de sommets distincts $(x_0, \ldots, x_n)$ telle que :
- x_0 n'est pas couplé ;
- $\{x_{2k}, x_{2k+1}\}$ est une arête de G n'appartenant pas à C, pour tout $k \leq n \div 2$;
- $\{x_{2k-1}, x_{2k}\}$ appartient à C, pour tout $k \leq n \div 2$.

Une chaîne alternée est *augmentante* si, de plus, x_n n'est pas couplé.

Q5. Prouver que si un couplage C admet une chaîne alternée augmentante $(x_0, \ldots, x_p)$ alors p est impair et le couplage C n'est pas de cardinal maximum. On pourra utiliser l'indication ci-dessous.

Définition. Si X et Y sont des ensembles, la *différence symétrique* de X et Y est :

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Indication. Si C est un couplage et si $(x_0, \ldots, x_p)$ est une chaîne augmentante pour C la preuve de Q5 consiste à prouver que $C \triangle \Gamma$ est aussi un couplage, où

$$\Gamma = \{\{x_0, x_1\}, \{x_2, x_3\}, \ldots, \{x_{p-1}, x_p\}\}.$$

Q6. Si C et C' sont deux couplages de G, avec $\operatorname{card} C < \operatorname{card} C'$, prouver que $C \triangle C'$ contient une chaîne augmentante pour C.

Q7. Prouver qu'un couplage C est de cardinal maximum *ssi* il n'admet pas de chaîne alternée augmentante.

II. Couplages dans les graphes bipartis.

Définition. Un graphe non orienté (S, A) est *biparti* si l'ensemble des sommets peut s'écrire sous la forme d'une union disjointe $S = U \uplus V$ telle que toute arête ne peut joindre qu'un sommet de U à un sommet de V :

$$\forall a \in A, \quad \operatorname{card}(a \cap U) = \operatorname{card}(a \cap V) = 1.$$

Un graphe biparti est dit *équilibré* si $\operatorname{card} U = \operatorname{card} V$.

Comme les chaînes alternées relativement à un couplage C alternent aussi les sommets dans U et V, et qu'une chaîne alternée augmentante à un nombre pair de sommets, on en déduit que ses extrémités appartiennent l'une à U et l'autre à V. On ne considérera ici que les chaînes alternées augmentantes d'origine U et d'extrémité dans V :

$$x_0 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{p-1} - x_p,$$

où
- p est impair,
- $x_i \in U$ pour i pair et $x_i \in V$ pour i impair,
- $\{x_i, x_{i+1}\} \notin C$ pour i pair et $\{x_i, x_{i+1}\} \in C$ pour i impair.

II.1. Dénombrements.

Soit C un couplage d'un graphe biparti $G = (U \uplus V, A)$.

On considère U_0 l'ensemble, possiblement vide, des sommets de U qui ne sont pas une extrémité d'une arête de C, et Z l'ensemble des extrémités finales de chemins alternantes commençant par un sommet de U_0. On pose $T = (U \setminus (U_0 \cup Z)) \cup (V \cap Z)$.

Dans l'exemple de la figure ci-après (Fig. 1), avec le couplage C indiqué en rouge, les ensembles U_0, Z et T sont :

$$U_0 = \{u_2\}, \quad Z = \{u_1, v_2\} \quad \text{et} \quad T = \{u_0, v_2\}.$$

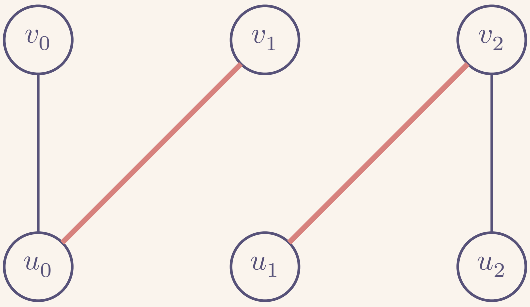

Fig. 1. Exemple de couplage dans un graphe biparti

Q8. Montrer que T est transversal.

Q9. Montrer que, dans un graphe biparti, $\alpha'(G) = \beta(G)$.

On note $\Gamma(X)$ l'ensemble des sommets adjacents à $X \subseteq S$.

Q10. Montrer qu'un graphe biparti G admet un couplage parfait *ssi* $\operatorname{card} \Gamma(X) \geq \operatorname{card} X$ pour tout $X \subseteq U$. On supposera G équilibré.

Parmi les questions de ce TD se cachent des théorèmes :

- Q3 est le théorème de Gallai,
- Q7 est le théorème de Berge,
- Q9 est le théorème de König,
- Q10 est le théorème de Hall.