Préparation aux oraux CCINP n°3

Arbres de preuve

On définit $\mathscr{R}$ le système de preuves formé des règles usuelles de dérivation en logique intuitionniste. Ces règles sont :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top\text{i} \qquad \frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\,\text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,\bot\text{e} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,\neg\text{i} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg\text{e}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\,{\to}\text{i} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\,{\to}\text{e} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}\,\land\text{i}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\,\land\text{e,g} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \land \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,\land\text{e,d} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \lor \psi}\,\lor\text{i,g} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \lor \psi}\,\lor\text{i,d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \lor \varphi \qquad \Gamma, \phi \vdash \psi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\,\lor\text{e}$$

L'arbre ci-dessous est la première partie de l'exercice. Il donne une dérivation fausse.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \lor B \vdash A \lor B}}{A \lor B \vdash A} \qquad \cfrac{\cfrac{}{A \lor B \vdash A \lor B}}{A \lor B \vdash B}}{A \lor B \vdash A \land B}}{\vdash (A \lor B) \to (A \land B)}$$

Q1. En ne considérant *que* la racine de l'arbre, montrer que la dérivation est fausse.

Q2. Étiqueter l'arbre, et indiquer les erreurs de dérivations si elles existent.

On définit deux nouvelles règles « ra » et « $\neg\neg$e », comme montré ci-dessous. On définit le système de preuve S_1 comme le système $\mathscr{R}$ auquel on ajoute la règle « ra ». On définit le système S_2 comme le système $\mathscr{R}$ auquel on ajoute la règle « $\neg\neg$e ».

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,\text{ra} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}\,\neg\neg\text{e}$$

On dit qu'une règle se dérive d'une autre si on peut créer un arbre de preuve montrant la conséquence de la règle, en supposant que l'on peut vérifier ses causes. Par exemple, la règle « cut » se déduit de la règle « $\to$e ». En effet

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\,\text{cut} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\textit{Supposé}}{\Gamma, \varphi \vdash \psi}}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\,{\to}\text{i} \qquad \cfrac{\textit{Supposé}}{\Gamma \vdash \varphi}}{\Gamma \vdash \psi}\,{\to}\text{e}$$

Q3. Dériver la règle « ra » en utilisant les règles de S_2.

Q4. Peut-on dériver la règle « $\neg\neg$e » en utilisant les règles du système S_2 ?

Q5. Que dire des systèmes S_1 et S_2 ?

Hugo Salou