Structures algébriques usuelles

Algèbre

- (M, +, ×, ·) est une $\mathbb{K}$-algèbre
  - (M, +, ·) est $\mathbb{K}$-espace vectoriel
  - (M, +, ×) est anneau
  - *quasi*-associativité de ×/· : $\lambda \cdot (u \times v) = (\lambda \cdot u) \times v = u \times (\lambda \cdot v)$
- sous-algèbre
  - $1 \in N$
  - $u + v \in N$
  - $u \times v \in N$
  - $\lambda u \in N$
- morphismes
  - $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  - $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$
  - $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
  - $f(1) = 1$

(M, +, ×) anneau, *quasi*-associativité de ×/·

Espace vectoriel

- (E, +, ·) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
  - ($\mathbb{K}$, +, ×) corps
  - (E, +) groupe commutatif
  - *quasi*-associativité de ×/· : $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$
  - $1 \cdot u = u$
  - "distributivité" de · sur +
- sous-espace vectoriel
  - $F \neq \emptyset$
  - $\lambda u + \mu v \in F$
- espace vectoriel normé $\|\cdot\|$
- espace préhilbertien
  espace euclidien $\langle \cdot | \cdot \rangle$

(E,+) groupe commutatif, *quasi*-associativité de ×/·, "distributivité" de · sur +

Corps

- ($\mathbb{K}$,+,×) est un corps
  - ($\mathbb{K}$,+,×) anneau commutatif
  - inverses (pour ×) des éléments non nuls
  - $1 \neq 0$
- sous-corps
  - $x - y \in \mathbb{L}$
  - $x / y \in \mathbb{L}$
- morphismes
  - $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  - $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

× commutatif, inverses pour ×

Monoïdes

- (M, +) est un monoïde
  - + interne associatif
  - + de neutre $0 \in M$

opposé pour +

Groupes

- (G, +) est un groupe
  - $-x \in E$ — $-x + x = 0$
  - (G, +) est un monoïde
- + est commutatif — groupe abélien
- sous-groupe
  - $x - y \in H$ — pour tout $x,y \in H$
  - $H \neq \emptyset$
- morphismes
  - $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  - ▷ f(groupe) = groupe
  - ▷ f^{-1}(groupe) = groupe

(A, ×) monoïde
(A,+) commutatif

Anneaux

- (A, +, ×) est un anneau
  - (A,+) groupe commutatif
  - (A,×) monoïde
  - distributivité de × sur +
    - à gauche
    - à droite
    - sauf si × commutative
- $a \times b = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ — anneau intègre
- binôme de Newton
  - si $a \times b = b \times a$
  - $(a+b)^n = \sum$ [k parmi n] $a^k b^{n-k}$
- $A^\times$ = { éléments inversibles de A }
- sous-anneau
  - B sous-groupe de (A, +)
  - $a \times b \in B$
  - $1 \in B$
- morphismes
  - $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  - $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$
  - $f(1) = 1$