

TP OPT 3

INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

Hugo SALOU
Noémie COMBEY *MPI**

L'objectif de ce TP est la mesure d'un spectrogramme, et son analyse, à partir des interférences créées par le Michelson. Plus particulièrement, on s'intéresse à l'effet d'un filtre interférentiel.

I. Protocole expérimental

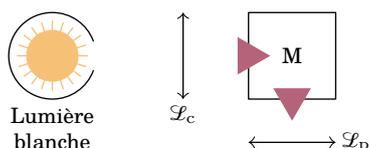


FIGURE 1 – Configuration initiale du Michelson

On commence par configurer l'interféromètre de Michelson au contact optique, comme montré dans la figure ci-dessus. Le « M » représente l'interféromètre, L_c représente le condenseur et L_p la lentille de projection. On place un filtre interférentiel entre la lumière blanche et le condenseur. On ajoute également un récepteur Caliens en sortie du Michelson, après avoir remplacé la lentille de projection par une lentille de focale plus courte ($f = 12,5$ cm). À l'aide d'un moteur, on change l'épaisseur e de la configuration en coin d'air du Michelson. On réalise simultanément l'acquisition de l'intensité $I(e)$ au centre de la figure d'interférence.

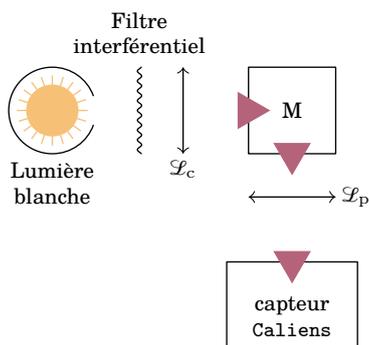


FIGURE 2 – Configuration expérimentale du Michelson

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure ci-dessous. Ils seront analysés dans la section III.

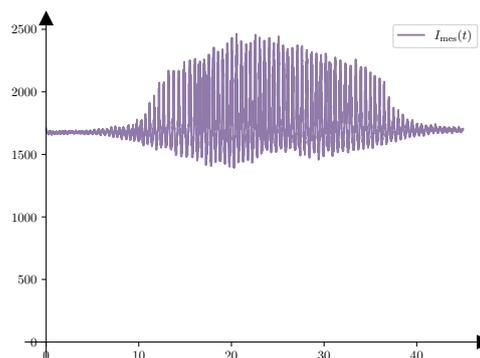


FIGURE 3 – Éclairement mesuré $I_{mes}(t)$ en fonction du temps t de rotation du moteur

II. Étude théorique

Dans le cadre de ce TP, on ne s'intéresse qu'à deux types de filtres interférentiels : ceux ayant un profil spectral rectangulaire et ceux ayant un profil spectral gaussien. Pour les deux types de filtres, l'éclairement $I(e)$ est donné par la formule

$$I(e) = I_0 \int_{\text{bande passante}} F(\sigma) \cdot [1 + \cos(2\pi (2e) \sigma)] d\sigma,$$

où σ est le nombre d'onde d'une radiation. Le choix de la fonction $F(\sigma)$ détermine l'effet du filtre sur des interférences, et c'est ce qui est étudié dans les deux sous-sections suivantes.

II.A. Filtre à profil spectral rectangulaire

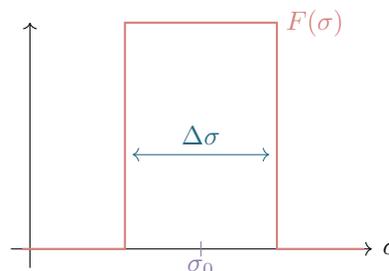


FIGURE 4 – Fonction $F(\sigma)$ pour le profil spectral rectangulaire

Avec un profil spectral rectangulaire, la fonction $F(\sigma)$ est de la forme représentée sur la fi-

gure ci-avant : $F(\sigma)$ est nul si $\sigma < \sigma_0 - \Delta\sigma/2$ ou si $\sigma > \sigma_0 + \Delta\sigma/2$, et $F(\sigma)$ vaut $K/\Delta\sigma$ sinon.

Cherchons une expression simplifiée de $I(e)$ pour ce filtre. En remplaçant les bornes de la bande passante et la fonction $F(\sigma)$, on trouve

$$I(e) = I_0 \int_{\sigma_0 - \Delta\sigma/2}^{\sigma_0 + \Delta\sigma/2} \frac{K}{\Delta\sigma} [1 + \cos(2\pi (2e) \sigma)] d\sigma.$$

En sortant le facteur $K/\Delta\sigma$, et à l'aide du changement de variable $\sigma \leftarrow \sigma + \sigma_0$, on trouve

$$\frac{I_0 K}{\Delta\sigma} + \frac{I_0 K}{\Delta\sigma} \int_{-\Delta\sigma/2}^{\Delta\sigma/2} \cos(2\pi (2e) \cdot (\sigma + \sigma_0)) d\sigma.$$

On applique la formule d'addition des cosinus pour trouver

$$I_0 K + \frac{I_0 K}{\Delta\sigma} \int_{-\Delta\sigma/2}^{\Delta\sigma/2} \cos(4\pi e \sigma_0) \cdot \cos(4\pi e \sigma) d\sigma + \frac{I_0 K}{\Delta\sigma} \int_{-\Delta\sigma/2}^{\Delta\sigma/2} \sin(4\pi e \sigma_0) \cdot \sin(4\pi e \sigma) d\sigma.$$

La seconde intégrale s'annule car l'intégrande est une fonction impaire, et l'intervalle est symétrique par rapport à 0. À l'aide d'un changement de variables $x \leftarrow 2\sigma/\Delta\sigma$, l'intensité $I(e)$ s'écrit alors comme

$$I_0 K + \frac{I_0 K}{2 \Delta\sigma} \cos(4\pi e \sigma_0) \int_{-1}^1 \cos(2\pi e \Delta\sigma x) dx.$$

Ce qui donne, après intégration,

$$I_0 K \left(1 + \frac{1}{2 \Delta\sigma} \cdot \cos(4\pi e \sigma_0) \cdot 2 \cdot \frac{\sin(2\pi e \Delta\sigma)}{2\pi e \Delta\sigma} \right),$$

que l'on peut simplifier en

$$I_0 K \cdot (1 + \cos(4\pi e \sigma_0) \cdot \text{sinc}(2\pi e \Delta\sigma)/\Delta\sigma).$$

Comme le moteur avance à une vitesse constante, on pourra remplacer e par $v \cdot (t - t_0)$.

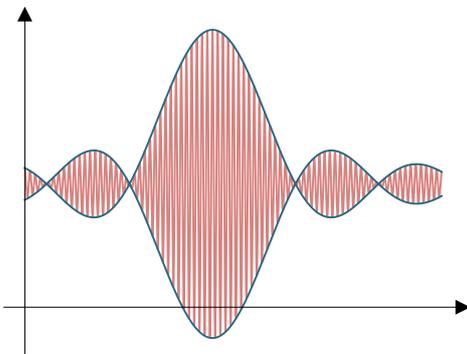


FIGURE 5 – Éclairement $I(t)$ pour un filtre à spectre rectangulaire

Dans l'hypothèse où $\Delta\sigma \ll \sigma_0$, la courbe $I(e)$ est bornée par $I_0 K (1 \pm \text{sinc}(2\pi e \Delta\sigma)/\Delta\sigma)$, comme le montre la figure ci-dessus. En analysant les oscillations de cette enveloppe, et notamment la fréquence, on peut en déduire la valeur de $\Delta\sigma$:

$$\Delta\sigma = \frac{f}{v},$$

où f est la fréquence mesurée de l'enveloppe. En effet, en ré-écrivant les équations des enveloppes en fonction du temps t , on trouve $I_0 K (1 \pm \text{sinc}(2\pi v (t - t_0)))$, où t_0 est l'instant du contact optique.

II.B. Filtre à profil spectral gaussien

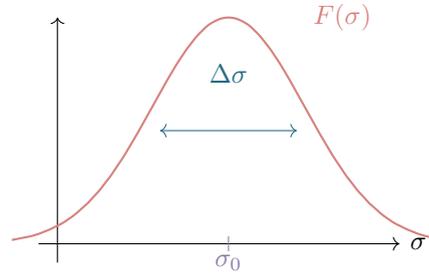


FIGURE 6 – Fonction $F(\sigma)$ pour le profil spectral gaussien

Avec un profil spectral gaussien, la fonction $F(\sigma)$ est de la forme d'une gaussienne représentée sur la figure ci-avant :

$$F(\sigma) = \frac{K}{\Delta\sigma} \cdot e^{-\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a}\right)^2}.$$

Cette fonction atteint son maximum pour $\sigma = \sigma_0$ avec la valeur $K/\Delta\sigma$. La largeur de la bande passante $\Delta\sigma$ correspond à la largeur à mi-hauteur de la fonction $F(\sigma)$. Déterminons cette valeur : à mi-hauteur, $\exp(-(\sigma - \sigma_0)^2/a^2) = 1/2$, d'où, par passage au logarithme,

$$\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a}\right)^2 = \ln 2.$$

La valeur $\sigma - \sigma_0$ correspond à la moitié de la bande passante $\Delta\sigma/2$, comme le montre la figure 6. On en déduit donc

$$\Delta\sigma = 2a\sqrt{\ln 2}.$$

Une analyse de Fourier permet de déterminer une expression de $I(e)$:

$$I(e) = \frac{I_0 K \sqrt{\pi}}{2\sqrt{\ln 2}} (1 + \cos(4\pi \sigma_0 e) \cdot e^{-(2\pi a e)^2}).$$

Dans la suite, on notera I_{\max} la valeur de $I_0 K \sqrt{\pi} / \sqrt{\ln 2}$, correspondant à l'intensité maximale (atteinte pour $e = 0$). On représente la fonction $I(e)$ sur la figure ci-après. Cette fonction est bornée par deux exponentielles décroissantes de la forme $I_{\max}(1 \pm e^{-(2\pi a e)^2})$.

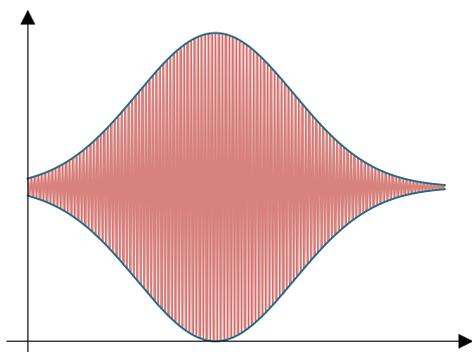


FIGURE 7 – Éclairement $I(t)$ pour un filtre à spectre gaussien

III. Analyse des résultats expérimentaux

À l'aide du logiciel `Regressi`, on réalise une modélisation de l'enveloppe de $I(e)$, sous une des deux formes déterminées dans la section II.

Pour la modélisation filtre à profil spectral gaussien, l'enveloppe haute est de la forme

$$I_{\text{haut}} = M + B \cdot e^{-(2\pi v (t-t_0) a)^2}.$$

Après régression, on trouve les valeurs $M \simeq 1644$, $B \simeq 810$, $a \simeq 22139 \text{ m}^{-1}$ et $t_0 \simeq 24,212 \text{ s}$. On représente la modélisation sur la figure ci-dessous.

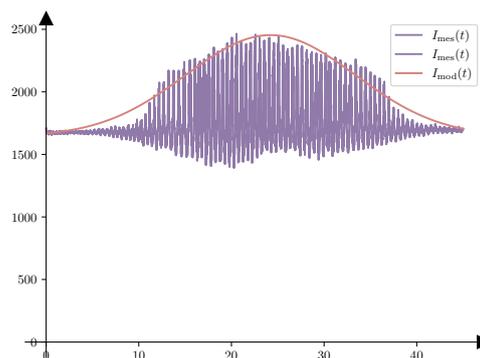


FIGURE 8 – Modélisation par un filtre à profil spectral gaussien

Pour la modélisation filtre à profil spectral rectangulaire, l'enveloppe haute est de la forme

$$I_{\text{haut}} = M + B \cdot \text{sinc}(2\pi v (t - t_0) \Delta\sigma).$$

Après régression, on trouve les valeurs $M \simeq 1647$, $B \simeq 799$, $\Delta\sigma \simeq 49273 \text{ m}^{-1}$ et $t_0 \simeq 23,598$. On représente la modélisation sur la figure ci-dessous.

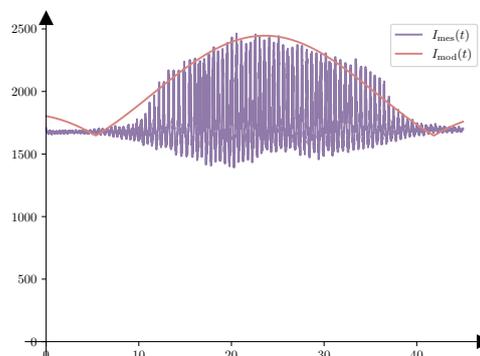


FIGURE 9 – Modélisation par un filtre à profil spectral rectangulaire

On peut en déduire que la modélisation par un filtre gaussien est plus en accord avec le modèle : la modélisation utilisant le sinus cardinal possède des « rebonds » au delà de la zone d'interférences, mais les données expérimentales ne possèdent pas ces « rebonds. » Malgré tout, le filtre interférentiel choisi semble être plus complexe que les deux modèles étudiés durant ce TP.

