# 1 Distance de visibilité d'une bougie

Pour trouver la distance maximale de visibilité de la bougie, on analyse l'inégalité

$$\mathscr{E}_{\text{reçue}} > 10 \cdot \mathscr{E}_{\text{photon}}.$$

L'énergie par un photon est donnée par $\mathscr{E}_{\text{photon}} = h\nu$. La puissance de la bougie est $P = 0{,}1$ W, et le temps de réaction est $t_{\text{r}} = 0{,}05$s. L'énergie produite par la bouge est donc $\mathscr{E}_{\text{bougie}} = P \times t_{\text{r}}$.

En notant $d_{\text{œuil}} = 5$ mm, on a

$$\mathscr{E}_{\text{reçue}} = \frac{\pi \cdot (d_{\text{œuil}}/2)}{4\pi d^2}.$$

Ainsi, en reprenant l'inégalité précédente, elle est équivalente à

$$\frac{(d_{\text{œuil}}/2)^2}{4d^2}\mathscr{E}_{\text{bougie}} > 10h\frac{c}{\lambda}$$

*i.e.*

$$\sqrt{\frac{P \cdot t_{\text{r}}}{40h\frac{c}{\lambda}}} \cdot \left(\frac{d_{\text{œuil}}}{2}\right) > d.$$

On choisit $\lambda = 600$ nm, on a donc $d < 48$ km.

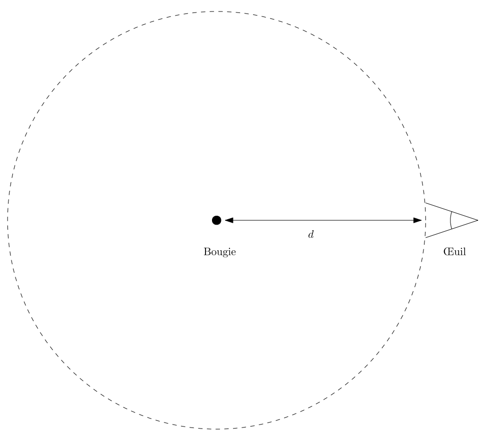


FIGURE 1 – Modèle bougie-œuil

# 2 Diode à vide

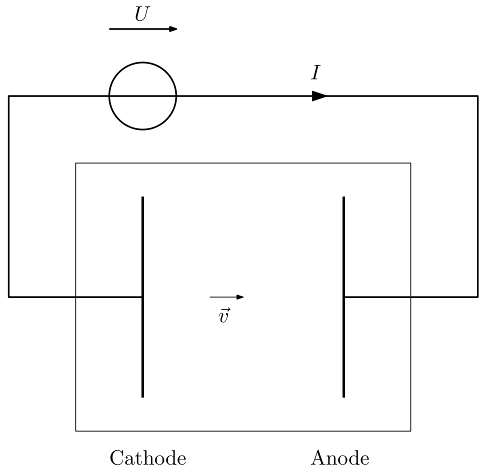


FIGURE 2 – Diode à vide

1. Le vecteur densité de courant s'écrit $\vec{\jmath} = nqv\vec{e}_x$. D'où, par intégration sur la surface, on a donc
$$I = -nq\,v\,S = -\rho(x) \cdot v(x) \cdot S.$$
2. Dans l'ARQS, le potentiel $V(x)$ vérifie l'équation de POISSON :
$$\Delta V = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = \frac{I}{\varepsilon_0\,v(x)\,S}. \tag{1}$$
L'énergie cinétique et l'énergie potentielle électrostatique sont données respectivement par
$$\mathscr{E}_{\text{c}} = \frac{1}{2}m\,v^2(x) \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_{\text{p}} = qV(x).$$
De plus, pour simplifier, on peut considérer que la cathode est à un potentiel nul, et l'anode à un potentiel $U$. Ainsi $V(0) = 0$ et $V(h) = U$. D'après le théorème de l'énergie mécanique appliqué à un électron, on a $\Delta\mathscr{E}_{\text{m}} = 0$. Or, avec les hypothèses considérées, on a $\mathscr{E}_{\text{c}}(0) = \mathscr{E}_{\text{p}}(0) = 0$. D'où,
$$\frac{1}{2}m\,v^2(x) + q\,V(x) = 0,$$
que l'on peut réécrire en
$$v(x) = \sqrt{\frac{-2q\,V(x)}{m}}.$$
On peut en conclure que
$$\boxed{\Delta V = \frac{\beta}{\sqrt{V}}} \text{ où } \beta = \frac{I}{S\varepsilon_0\sqrt{-2q/m}}.$$
3. On calcule
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \Delta V = A \cdot \alpha(\alpha - 1) \cdot x^{\alpha-2}$$

et
$$\frac{\beta}{\sqrt{V(x)}} = \frac{\beta}{\sqrt{A}} x^{-\alpha/2}.$$

Ainsi, par identification, on a donc

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha/2 = \alpha - 2 \\ A \cdot \alpha(\alpha - 1) = \beta/\sqrt{A} \end{array}\right\} \iff \begin{cases} \alpha = 4/3 \\ A = (9\beta/4)^{2/3}. \end{cases}$$

On applique ensuite la condition limite sur l'anode :

$$V(h) = U = \left(\frac{9\beta}{4}\right)^{2/3} \cdot h^{4/3}.$$

On en déduit $I$ avec la formule précédente.

4. Des effets relativistes apparaissent, ce qui change le théorème de l'énergie mécanique.

# 3 Chaîne de pendules

1. On considère le système { $n$-ième pendule }, et on réalise un bilan des forces.

   - Poids $\vec{P} = mg(\cos\theta_n \vec{e}_r - \sin\theta_n \vec{e}_\theta)$
   - Tension $\vec{T} = -T\vec{e}_r$
   - Force de rappel du ressort précédent :
   $$F_1 = -k \cdot L(\sin\theta_n - \sin\theta_{n-1})\vec{e}_x.$$
   - Force de rappel du ressort suivant :
   $$F_2 = k \cdot L(\sin\theta_{n+1} - \sin\theta_n)\vec{e}_x.$$

   Et, $\vec{e}_x = \sin\theta_n \vec{e}_r + \cos\theta_n \vec{e}_\theta$. D'où, en appliquant le PFD selon $\vec{e}_\theta$, on a donc

   $$\begin{aligned} mL\ddot{\theta}_n = -mg\sin\theta_n - kL(\sin\theta_n - \sin\theta_{n-1}) \\ + kL(\sin\theta_{n-1} - \sin\theta_n) \end{aligned}$$

   On en déduit l'équation différentielle (E) vérifiée par $\theta_n$ :

   $$\ddot{\theta}_n + \theta_n \cdot \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right) = \frac{k}{m}(\theta_{n-1} + \theta_{n+1})$$

   dans l'hypothèse des petits angles.

2. En appliquant la formule de Taylor-Young, on a

   $$\theta(x = na - a) = \theta(x = na) - a \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=na} + \frac{a^2}{2} \left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{x=na}$$

   et

   $$\theta(x = na + a) = \theta(x = na) + a \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=na} + \frac{a^2}{2} \left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{x=na}.$$

   Ainsi, en calculant le terme de droite de l'équation (E), on a

   $$\theta(x = (n-1)a) + \theta(x = (n+1)a) = 2\theta(x = na) + a^2 \left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{x=na}.$$

   L'équation (E) devient donc

   $$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(x, t) + \theta(x, t) \cdot \frac{g}{L} = \frac{k_\mathrm{r}}{m} a^2 \left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{x=na}.$$

3. D'après (E), on a donc

   $$(\mathrm{j}\omega)^2\theta + \frac{g}{L}\theta = \frac{k_\mathrm{r} a^2}{m}(-\mathrm{j}\underline{k})^2\theta,$$

   quel que soit l'instant $t$, et la position $x$. Ainsi,

   $$-\underline{k}^2 \cdot \frac{k_\mathrm{r} a^2}{m} = \frac{g}{L} - \omega^2,$$

   d'où,

   $$\underline{k}^2 = \frac{m}{k_\mathrm{r} a^2}(\omega^2 - \omega_0^2).$$

4. Si $\omega > \omega_0$, alors $k \in \mathbb{R}$ et donc il y a propagation sans absorption. Et,

   $$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{w}{\sqrt{\frac{m}{k_\mathrm{r} a^2}} \cdot \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}},$$

   le milieu est dispersif.

   Si $\omega < \omega_0$, alors $k \in i\mathbb{R}$ ; il n'y a donc pas de propagation.

# 4 Barres en triangle

On note $a(x)$ le côté du triangule équilatéral, et donc $x = a(x)\sqrt{3}/2$.

On calcule le flux $\Phi$ magnétique :

$$\Phi = B\frac{ax}{2} = Bx^2/\sqrt{3}.$$

Ainsi, d'après la loi de Faraday, on a

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{2B}{\sqrt{3}}\, x\, \dot{x}.$$

Or, par loi d'Ohm, $i = e/R(x)$. Et, on connait la resistance du circuit $R(x) = 3a(x)/\gamma S$. Alors,

$$\begin{aligned} i(x) = \frac{-2B\, x\, \dot{x}}{\sqrt{3} \cdot \frac{3a(x)}{\gamma S}} &= -\frac{2B\gamma S}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{x\, \dot{x}}{2\frac{x}{\sqrt{3}}} \\ &= -B\gamma S\dot{x}/3. \end{aligned}$$

On calcule donc la force de LAPLACE :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathscr{L}} &= i \cdot [\mathrm{CD}] \cdot B \cdot \vec{e}_x \\ &= i \cdot \frac{2\dot{x}}{\sqrt{3}} B \vec{e}_x \\ &= -\underbrace{\frac{2B^2\gamma S}{3\sqrt{3}}}_{\alpha} \cdot x\dot{x}\end{aligned}$$

D'après le PFD, on a donc

$$m\ddot{x} = -\alpha x \dot{x} \text{ d'où } \ddot{x} = -\frac{\alpha}{m} x\dot{x}.$$

où $m = \rho S L$.

On intègre les deux côtés de l'équation,

$$[\dot{x}]_0^{t_{\mathrm{f}}} = -\frac{\alpha}{m} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{t_{\mathrm{f}}}.$$

D'où,

$$0 - v_0 = \frac{-\alpha}{m} \cdot x_{\mathrm{f}}^2/2.$$

On en conclut

$$x_{\mathrm{f}} = \sqrt{\frac{2m}{\alpha} v_0}.$$