1 Perle sur un cercle en rotation

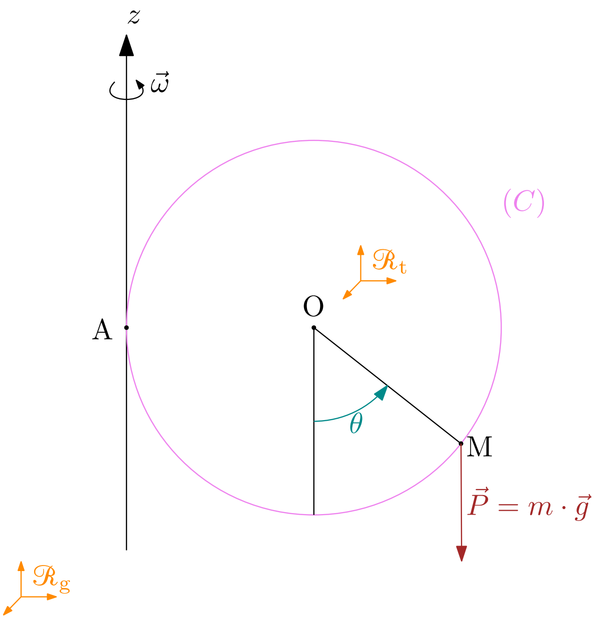

Figure 1 – Système étudié

1. On considère le système { point M de masse m } dans le référentiel $\mathscr{R}_t$, et on réalise un bilan des forces :
   - le poids $\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$,
   - la réaction du support $\vec{R} = -N\vec{e}_r$,
   - l'inertie d'entraînement
   $$\begin{aligned}\vec{f}_{\mathrm{i,e}} &= -m\vec{a}_{\mathrm{e}}\\ &= m\omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}}\\ &= m\omega^2 a\cdot(1+\sin\theta)\cdot(\sin\theta\vec{e}_r+\cos\theta\vec{e}_\theta),\end{aligned}$$
   - l'inertie de Coriolis
   $$\vec{f}_{\mathrm{i,c}} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}(\mathrm{M},\mathscr{R}_t) = \vec{0}.$$

   D'où, d'après le PFD projeté selon $\vec{e}_\theta$, on obtient l'équation
   $$ma\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta.$$
2. Avec le système à l'équilibre, l'équation devient
   $$-mg\sin\theta + m\omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta = 0,$$
   et donc
   $$\omega^2\cdot a(1+\sin\theta) = g\tan\theta.$$
3. D'après l'équation de la question précédente, on a
   $$\omega^2 = \frac{g\tan\theta_0}{a\cdot(1+\sin\theta_0)}.$$
   Après application numérique, on trouve que $\omega = \pm 4{,}3\,\mathrm{rad/s}$.

2 Glissade d'une règle

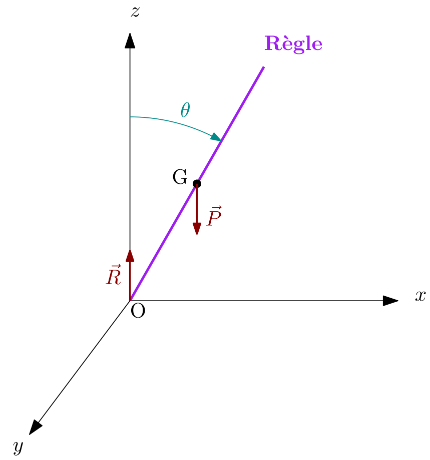

Figure 2 – Système étudié

On applique le théorème du moment cinétique :
$$\begin{aligned}J\cdot\ddot{\theta} &= \mathscr{M}_{(\mathrm{O}y)}(\vec{P})\\ &= \frac{1}{2}mgL\sin\theta,\end{aligned}$$
par bras de levier. D'où, en remplaçant J par $mL^2/3$, on obtient donc l'équation
$$(1)\ :\qquad \ddot{\theta} = \frac{3g}{2L}\sin\theta.$$
On calcule $\dot{\theta}\cdot(1)$ pour trouver
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{3g}{2L}(\sin\theta)\dot{\theta}.$$
Ainsi, par intégration, on trouve donc
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2(t)-\dot{\theta}^2(0)\right) &= \frac{3g}{2L}\cdot\int_0^\theta \sin\alpha\ \mathrm{d}\alpha\\ &= \frac{3g}{2L}[-\cos\alpha]_0^\theta.\end{aligned}$$
Et, comme $\dot{\theta}(0) = 0$, on en déduit que
$$(2)\ :\qquad \dot{\theta}^2(t) = \frac{3g}{L}\left(1-\cos\theta\right).$$
On peut retrouver ce résultat à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.

De plus, d'après le PFD selon l'axe $(\mathrm{O}z)$, on a
$$m\ddot{z} = N - mg,$$
où N est la composante normale de la réaction du support. De plus, $z = L\cos\theta/2$ et donc
$$\ddot{z} = -\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\right).$$

On a donc,

$$-\frac{Lm}{2}\left(\frac{3g}{2}\sin^2\theta-\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)\cos\theta\right)=N-mg.$$

Et, en appliquant le PFD selon l'axe (Ox), on trouve

$$m\ddot{x}=T=\frac{mL}{2}\cdot\left(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta\right).$$

D'où, en appliquant l'équation (2), on trouve que

$$\frac{mL}{2}\cdot\left(\frac{3g}{2L}\cdot\frac{\sin(2\theta)}{2}-\frac{3g}{2L}\sin\theta\cdot(1-\cos\theta)\right)=T.$$

Or, d'après les lois de Coulomb, on a

$$f=\frac{T(\theta_\mathrm{c})}{N(\theta_\mathrm{c})}.$$

On peut calculer les valeurs de $T(\theta_\mathrm{c})$ et de $N(\theta_\mathrm{c})$, et en déduire la valeur du coefficient de frottements f.

3 Orbitales π de la molécule de benzène

1. On a
$$\underline{\Psi}(x,t)=A\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-Et/\hbar)}.$$
On applique l'équation de Schrödinger :
$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+V(x)\,\underline{\Psi}.$$
D'où, en substituant $\underline{\Psi}$, on a donc
$$E\cdot\varphi(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\cdot\varphi(x).$$
Dans le cas où $V(x)=0$, pour tout x de 0 à $2\pi a$, on a donc
$$\varphi(x)+\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x)=0,$$
et donc $k=\sqrt{2mE/\hbar^2}$. On en déduit donc la forme de la fonction d'onde des particules :
$$\underline{\Psi}(x,t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-Et/\hbar)}.$$
On normalise cette fonction d'onde pour trouver que $A=1/2\pi a$.

2. (a) Ce choix représente le fait que la particule est sur un cercle de rayon a.
   (b) On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi a}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k0}$ donc $k2\pi a\equiv 0\ [2\pi]$ et donc
$$k_m=\frac{m\cdot 2\pi}{2\pi\cdot a}=\frac{m}{a},$$
avec $m\in\mathbb{N}^*$. Avec l'équation de la question 1, on a donc
$$E_m=\frac{\hbar^2}{2m_\mathrm{p}}\cdot\left(\frac{m}{a}\right)^2.$$