TD n° 11

Preuves

Hugo SALOU MPI*

Dernière mise à jour le 22 janvier 2023

1 Formalisation

1. **(1)** $\forall e,\ \big(\mathsf{etudiant}(e) \to \mathsf{raison}(e)\big)$;
   (2) $\forall e,\ \big(\mathsf{raison}(e) \to \mathsf{humain}(e)\big)$;
   (3) $\forall e,\ \mathsf{raison}(e) \to \neg\mathsf{elephant}(e)$;
   (4) $\forall e,\ \big((\mathsf{animal}(e) \land \neg\mathsf{chien}(e)\big) \to \forall \ell,\ \big(\mathsf{logicien}(\ell) \to \mathsf{gentil\_avec}(e,\ell)\big)$
   (5) $\forall h,\ \exists e,\ \mathsf{elephant}(e) \to \mathsf{cherche}(h,e)$;
   (6) $\forall e,\ \big[\big(\exists a,\ \mathsf{aime}(x,y)\big) \land \big(\exists a,\ \neg\mathsf{aime}(e,a)\big)\big]$;
2. $\forall x, \mathsf{entier}(x) \to \big[\exists y, \mathsf{entier}(y) \to \big(\mathsf{successeur}(x,y) \to (\forall z, \mathsf{entier}(z) \to \neg\mathsf{inf}(z,x) \to \mathsf{inf}(y,z))\big)\big]$.

2 Variables libres et liées, clôture universelle

1.

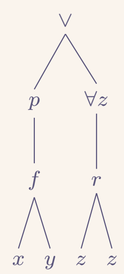

Figure 1 – Arbre de syntaxe de la formule $p\big(f(x,y)\big) \lor \forall z,\ r(z,z)$

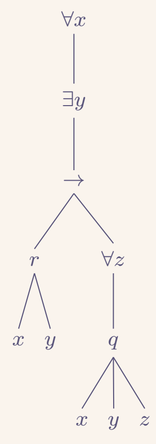

Figure 2 – Arbre de syntaxe de la formule $\forall x,\ \exists y,\ \big(r(x,y) \to \forall z,\ q(x,y,z)\big)$

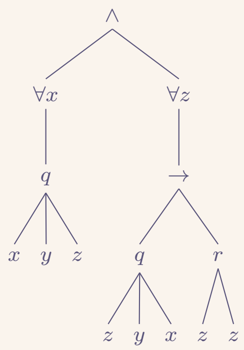

Figure 3 – Arbre de syntaxe de la formule $\forall x,\ (x, y, z) \wedge \forall z,\ \big(q(z, y, x) \to r(z, z)\big)$

2. Pour la formule (F_1), l'ensemble des constantes est $\mathcal{S}_0 = \varnothing$, l'ensemble des fonctions est $\mathcal{S} = \big\{f(2)\big\}$. Pour la formule (F_2), l'ensemble des constantes est $\mathcal{S}_0 = \varnothing$, l'ensemble des fonctions est $\mathcal{S} = \varnothing$. Pour la formule (F_3), l'ensemble des constantes est $\mathcal{S}_0 = \varnothing$, l'ensemble des fonctions est $\mathcal{S} = \varnothing$.
3. Pour la formule (F_1), l'ensemble des symboles de prédicats est $\mathcal{P} = \big\{p(1), r(2)\big\}$. Pour la formule (F_2), l'ensemble des symboles de prédicats est $\mathcal{P} = \big\{r(2), q(3)\big\}$. Pour la formule (F_3), l'ensemble des symboles de prédicats est $\mathcal{P} = \big\{q(3), r(2)\big\}$.
4. Pour la formule (F_1), $\mathsf{FV} = \{x, y\}$ et $\mathsf{BF} = \{z\}$. Pour la formule (F_2), $\mathsf{FV} = \varnothing$ et $\mathsf{BF} = \{x, y, z\}$. Pour la formule (F_3), $\mathsf{FV} = \{x, y, z\}$ et $\mathsf{BF} = \{x, z\}$.

3 Substitution

1.

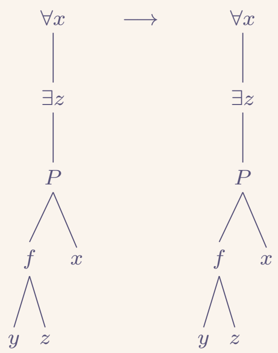

Figure 4 – Calcul de la substitution $F\big[x \mapsto f(y, z)\big]$, pour la formule 1

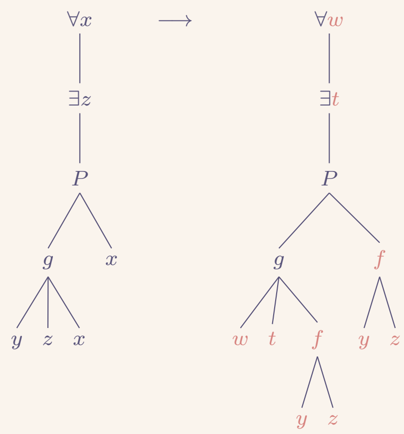

Figure 5 – Calcul de la substitution $F[x \mapsto f(y,z)]$, pour la formule 2

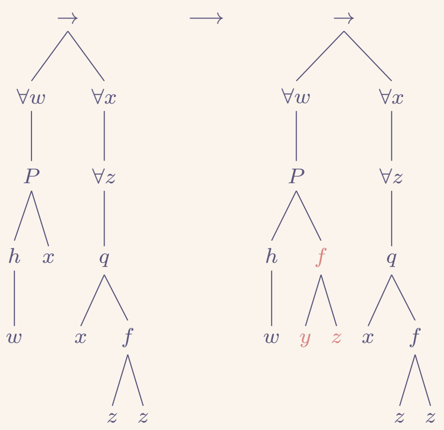

Figure 6 – Calcul de la substitution $F[x \mapsto f(y,z)]$, pour la formule 3

4 Quelques arbres de preuves

1. *c.f.* exemple chapitre 6.
2. $$\dfrac{\dfrac{}{\exists t,\ \forall x,\ \varphi(t,x) \vdash \exists t,\ \forall x,\ \varphi(t,x)}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists t,\ \forall x,\ \varphi(t,x); \forall x,\ \varphi(t,x) \vdash \forall x,\ \varphi(t,x)}\,\text{Ax}}{\exists t,\ \forall x,\ \varphi(t,x); \forall x,\ \varphi(t,x) \vdash \varphi(t,x)}\,\forall\text{e}}{\exists t,\ \forall x,\ \varphi(t,x); \forall x,\ \varphi(t,x) \vdash \forall y,\ \exists x,\ \varphi(x,y)}\,\exists\text{i}}{\exists t,\ \forall x,\ \varphi(t,x) \vdash \forall y,\ \exists x,\ \varphi(x,y)}\,\exists\text{e}\ .$$
3. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x,\ \varphi; \exists x,\ \neg\varphi \vdash \exists x,\ \neg\varphi}\,\text{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x,\ \varphi; \exists x,\ \neg\varphi; \neg\varphi \vdash \forall x,\ \varphi}\,\text{Ax}}{\forall x,\ \varphi; \exists x,\ \neg\varphi; \neg\varphi \vdash \varphi}\,\forall\text{e} \qquad \dfrac{}{\forall x,\ \varphi; \exists x,\ \neg\varphi; \neg\varphi \vdash \neg\varphi}\,\text{Ax}}{\forall x,\ \varphi; \exists x,\ \neg\varphi; \neg\varphi \vdash \bot}\,\neg\text{e}}{\forall x,\ \varphi; \exists x,\ \neg\varphi \vdash \bot}\,\exists\text{e}}{\forall x,\ \varphi \vdash \neg(\exists x,\ \neg\varphi)}\,\neg\text{i}\ .$$

4.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\exists x,\ \neg\varphi; \forall x,\ \varphi \vdash \exists x,\ \neg\varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\exists x,\ \neg\varphi; \forall x,\ \varphi; \neg\varphi \vdash \neg\varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\exists x,\ \neg\varphi; \forall x,\ \varphi; \neg\varphi \vdash \forall x,\ \varphi$}
\RightLabel{$\forall$e}
\UnaryInfC{$\exists x,\ \neg\varphi; \forall x,\ \varphi; \neg\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\neg$e}
\BinaryInfC{$\exists x,\ \neg\varphi; \forall x,\ \varphi; \neg\varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\exists$e}
\BinaryInfC{$\exists x,\ \neg\varphi; \forall x,\ \varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg$i}
\UnaryInfC{$\exists x,\ \neg\varphi \vdash \neg(\forall x,\ \varphi)$}
\end{prooftree}.
$$

5 Distributivité des quantificateurs

1.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\forall x,\ (\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x,\ (\varphi \wedge \psi)$}
\RightLabel{$\forall$e}
\UnaryInfC{$\forall x,\ (\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \wedge \psi$}
\RightLabel{$\wedge$e,g}
\UnaryInfC{$\forall x,\ (\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\forall$i}
\UnaryInfC{$\forall x,\ (\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x,\ \varphi$}
\AxiomC{$\vdots$}
\UnaryInfC{$\forall x,\ (\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x,\ \psi$}
\BinaryInfC{$\forall x,\ (\varphi \wedge \psi) \vdash (\forall x,\ \varphi) \wedge (\forall x,\ \psi)$}
\end{prooftree}.
$$

6 Semi-distributivité des quantificateurs

7 Logique classique du premier ordre

1.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg(\exists x,\ \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \neg(\exists x,\ \neg\varphi)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg(\exists x,\ \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \neg\varphi$}
\RightLabel{$\exists$i}
\UnaryInfC{$\neg(\exists x,\ \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \exists x,\ \neg\varphi$}
\RightLabel{$\neg$e}
\BinaryInfC{$\neg(\exists x,\ \neg\varphi), \neg\varphi \vdash \bot$}
\RightLabel{Abs}
\UnaryInfC{$\neg(\exists x,\ \neg\varphi) \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\forall$i}
\UnaryInfC{$\neg(\exists x,\ \neg\varphi) \vdash \forall x,\ \varphi$}
\end{prooftree}.
$$