Chapitre 31

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 22 juin 2022

Table des matières

Exercice 1

1. On pose $\Omega = S_n$ muni de l'équiprobabilité P. On a donc

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ (X = i) &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = i\} \\ &= \left\{\omega = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix} \in \Omega \;\middle|\; \omega_i = 1\right\}\end{aligned}$$

$$P(X = i) = \frac{\#(X = i)}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

2. $X \sim \mathscr{U}\big([\![1, n]\!]\big)$.

Autre rédaction : On note $Y_i = j$ si on a tiré le jeton j lors du tour i. D'où

$$(X = i) = (Y_1 \neq 1) \cap \cdots \cap (Y_{i-1} \neq i) \cap (Y_i = 1).$$

Et donc,

$$P(X = i) = P(Y_1 \neq 1) P_{(Y_1 \neq 1)}(Y_2 \neq 2) \cdots P_{(Y_1 \neq 1, \ldots, Y_{i-2} \neq 1)}(Y_{i-1} \neq 1) P_{(Y_1 \neq 1, \ldots, Y_{i-1} \neq 1)}(Y_i = 1).$$

Exercice 4

1. $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$. On a

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!]\,,\ P(T_n = k) = q^{k-1}\,p$$

et $P(T_n = n) = q^n + q^{n-1}p = q^{n-1}$.
<u>Vérification</u> :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) &= \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}\,p + q^{n-1}\\ &= \cancel{p} \times \frac{1-q^{n-1}}{\cancel{1-q}} + q^{n-1}\\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\,P(T_n = k)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\,q^{k-1}\,p + nq^{n-1}\\ &= p\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\sum_{k=0}^{n-1} q^k\right) + nq^{n-1}\\ &= p\frac{-nq^{n-1} + (1-q^n)}{(1-q)^2} + nq^{n-1}\\ &= \frac{1-q^n-npq^{n-1}}{p} + nq^{n-1}\\ &= \frac{1-q^n}{p}.\end{aligned}$$

2. $X_n \sim \mathscr{B}(1-q^n)$. $E(X_n) = 1-q^n$.
3. $X_n + Y_n = T_n$ d'où, par linéarité de l'espérance,

$$E(X_n) + E(Y_n) = E(T_n).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}E(Y_n) &= E(T_n) - E(X_n)\\ &= \frac{1-q^n}{p} - (1-q^n)\\ &= (1-q^n)\left(\frac{1-p}{p}\right)\\ &= \frac{q}{p}(1-q^n).\end{aligned}$$

Exercice 5

1.

$v \backslash u$	0	1	2
-1	0	qp	0
0	q^2	0	p^2
1	0	qp	0

2. $P(U=2, V=1) = 0 \neq P(U=2)\,P(V=1) = qp^3$.

Exercice 2

Soit (Ω, P) un espace probabilisé modélisant la situation.

1. On a $X(\Omega) = [\![2, n-1]\!]$.

$$\forall k \in [\![2, n-1]\!]\,,\; P(X=k) = \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}}.$$

<u>Vérification</u> :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X=k) &= \frac{3!\,(n-3)!}{n!} \sum_{k=2}^{n-1} \big(-k^2 + (n+1)k - n\big) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(-\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} + 1 + (n+1)\frac{(n-2)(n+1)}{2} - n\,(n-2)\right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \times \frac{-n(n-1)(2n-1) + 6 + 3(n+1)^2 + (n-2) - 6n(n-2)}{6} \\
&= \frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n} \times \big(n^3 - 3n^2 + 2n\big) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2.

$$E(X) = \sum_{k=2}^{n-1} k\frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{3}} = \cdots\cdots\cdots$$

Exercice 3

1. Pour tout i, $Y_i \sim \mathscr{B}\left(m, \frac{1}{n}\right)$ et $X_i \sim \mathscr{B}\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right)$.
2. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ d'où $E(X) = n\underbrace{\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right)}_{E(X_i)}$.

Exercice 6

$(X,Y) \sim \mathscr{U}\left(\llbracket 1,6 \rrbracket^2\right)$;

$z \backslash x$	1	2	3	4	5	6	
1	$1/6$	0	0	0	0	0	$1/6$
2	0	$1/6$	0	0	0	0	$1/6$
3	0	0	$1/6$	0	0	0	$1/6$
4	0	0	0	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/6$
5	0	0	0	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/6$
6	0	0	0	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/6$
	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	

Exercice 7

$$X = \sum_{i=1}^{Np} X_i \quad \text{d'où} \quad E(X) = \sum_{i=1}^{Np} E(X_i).$$

Or, $X_i \sim \mathscr{B}\left(\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}\right)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{Np} \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{n!\,\cancel{(N-n)!}\,(N-1)!\,Np}{N!\,(n-1)!\,\cancel{(N-n)!}} \\ &= \frac{n}{N}Np \\ &= np. \end{aligned}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{Np} V(x_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j} \operatorname{Cov}(X_i,X_j)$$

où

$$\operatorname{Cov}(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j).$$

1. $X_i \sim \mathscr{B}\left(\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}\right)$.

$$E(X_i) = \frac{n!\,(N-n)!}{N!} \times \frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!} = \frac{n}{N}.$$

$$V(X_i) = \frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right) = \frac{n(N-n)}{N^2}.$$

2. $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$. Or, $X_iX_j \sim \mathscr{B}\big(P(X_i = 1, X_j = 1)\big)$ et

$$\begin{aligned} P(X_i = 1, X_j = 1) &= \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{(N-2)!}{(n-2)!\,\cancel{(N-n)!}} \times \frac{n!\,(N-n)!}{N!} \\ &= \frac{n(n-1)}{N(N-1)}. \end{aligned}$$

3. On a $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{Np} X_i$ et donc

$$E(X) = \sum_{i=1}^{Np} E(X_i) = \frac{n}{N} \times Np = np$$

et

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{Np} V(X_i) + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant Np} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\ &= p\frac{n}{N}(N-n) + \cancel{N}p(Np-1)\frac{n(n-1)}{\cancel{N}(N-1)}. \end{aligned}$$

Loi de X :

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Exercice 8

1. $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ P(X = k) = q^{k-1}\,p.$$

(cela correspond, à quelques détails près, à la loi géométrique)
Également, $P(X = n+1) = q^n$.
Vérification : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p + q^n = p\frac{1-q^n}{1-q}q^n = 1$.

2.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} k\, P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} p + (n+1) q^n \\
&= p \,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \left(\sum_{k=0}^{n} q^k \right) + (n+1) q^n \\
&= p \,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) + (n+1) q^n \\
&= p \frac{-(n+1)q^n(1-q) + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2} + (n+1)q^n \\
&= -(n+1)q^n \,\frac{1-q^{n+1}}{p} + (n+1)q^n \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{p}
\end{aligned}
$$

3. On cherche p tel que

$$
\begin{aligned}
P(X = n+1) \leqslant \frac{1}{2} &\iff q^n \leqslant \frac{1}{2} \\
&\iff q \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{2}}
\end{aligned}
$$

Exercice 9

On pose $q = 1 - p$.

La probabilité que l'avion à deux moteurs arrive à destination est $P_A(D) = q^2 + 2pq = 1 - p^2$.

La probabilité que l'avion à quatre moteurs arrive à destination est $P_B(D) = q^4 + 4pq^3 + 6p^2q^2$.

On pose $f : p \mapsto (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2 - 1 + p^2$.

⚠ erreur de calcul probable.

$\forall p \in [0,1]$, $f(p) = 3p^4 - 4p^3 + p^2 = p^2 \underbrace{(3p^2 - 4p + 1)}_{\Delta = 16 - 4\times 3\times 1 = 4}$

p	0		$\frac{1}{3}$		1
$f(p)$		$+$	0	$-$	0

Exercice 10

C'est la loi trinomiale.

1. p^2qr^2 ; $\binom{5}{2}\binom{3}{1}p^2qr^2$
2. $$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^iq^jr^k = \frac{n!}{i!\,\cancel{(n-i)!}} \times \frac{\cancel{(n-i)!}}{j!\,(n-i-j)!}p^iq^jr^k$$
$$= \frac{n!}{i!\,j!\,k!}p^i\,q^j\,r^k$$

3. *Application* On a $p = q = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$; $r = \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{58}{100}$.
   On note X le nombre de succès de A, et Y le nombre de succès de B.

$$\begin{aligned} P(X>Y) &= \sum_{x=0}^{5} P(X=x, Y<x) \\ &= \sum_{x=0}^{5}\sum_{y=0}^{x-1} P(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{i-1} \frac{5!}{i!\,j!\,(5-i-j)!}\left(\frac{21}{100}\right)^i\left(\frac{21}{100}\right)^j\left(\frac{58}{100}\right)^{5-i-j}. \end{aligned}$$