Chapitre 27

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 2

On pose $\Omega = \left\{A \in \mathscr{P}\big(\llbracket 1, N \rrbracket\big) \mid \#A = k\right\}$. On a $\#\Omega = \binom{N}{k}$.

Soient $d_1, \ldots, d_n$ les pièces défectueuses. On pose

$$A_k = \left\{\omega \in \Omega \mid \#\big(\omega \cap \{d_1, \ldots, d_n\}\big) = j\right\}$$

et P l'équiprobabilité.

$$P(A_j) = \frac{\#A_j}{\#\Omega} = \frac{\binom{n}{j}\binom{N-n}{k-j}}{\binom{N}{k}}$$

Exercice 7

1. On pose $\Omega = \{\omega \in \mathscr{P}([\![1, n+m]\!]) \mid \#\omega = n\}$, P l'équiprobabilité.
   Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ qui représente l'événement considéré. On a
   $$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A}{\binom{n+m}{n}}.$$
   Par exemple, avec $n = 5$, $m = 4$ et $r = 3$. On cherche
   $$\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_.$$
   On place i_1 "L" avec $i_1 \geqslant 0$.
   Puis, j_1 "O" avec $j_1 > 0$.
   Puis, i_2 "L" avec $i_1 > 0$.
   Puis, j_2 "O" avec $j_2 > 0$.
   $\vdots$
   Puis, j_r "O" avec $j_r > 0$.
   Enfin, on place i_{r+1} "L" avec $i_{r+1} \geqslant 0$.
   On doit avoir
   $$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r+1} i_k = m \\ \sum_{k=1}^{r} j_k = n \end{cases}$$
   On a
   $$\#A = \binom{n-1}{r-1}\binom{m+1}{r}$$
   d'où
   $$P(A) = \frac{\binom{n-1}{r-1}\binom{m+1}{r}}{\binom{m+n}{n}}.$$
2. $$\frac{\binom{6}{6}\binom{10}{7}}{\binom{16}{7}} \simeq 0{,}01$$

Exercice 10

On condisère un espace probabilisé (Ω, P) qui modélise la situation. On pose

$$A : \text{“on a caché le trésor”}$$
$$\forall i \in [\![1, N]\!], T_i : \text{“le trésor est dans le coffre } i\text{”}.$$

On suppose que

$$P(A) = p$$
$$P_A(T_i) = \frac{1}{N}$$
$$P_{\bar{A}}(T_i) = 0.$$

On cherche $P_{\bar{T}_1 \cap \cdots \cap \bar{T}_{N-1}}(T_N)$.

$$\begin{aligned}
P_{\bar{T}_1\cap\cdots\cap\bar{T}_{N-1}} &= P_{\bar{T}_1\cap\cdots\cap\bar{T}_{N-1}}(A)\, P_{\bar{T}_1\cap\cdots\cap\bar{T}_{N-1}\cap A}(T_n) + P_{\bar{T}_1\cap\cdots\cap\bar{T}_{N-1}}(\bar{A}) P_{\bar{T}_1\cap\cdots\cap\bar{T}_{N-1}\cap\bar{A}}(T_n) \\
&= P_{\bar{T}_1\cap\cdots\cap\bar{T}_{N-1}}(A) \\
&= \frac{P_A(\bar{T}_1\cap\cdots\cap\bar{T}_{N-1})P(A)}{P_A(\bar{T}_1\cap\cdots\cap\bar{T}_{N-1})P(A)P_{\bar{A}}(\bar{T}_1\cap\cdots\cap\bar{T}_{N-1})P(\bar{A})} \\
&= \frac{p\frac{1}{N}}{p\frac{1}{N}(1-p)} \\
&= \frac{p}{p+N(1-p)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

```python
def experience(p, N):
    coffres = [True] * N
    if rd.random() < p:
        k = rd.randint(0, N-1)
        coffres[k] = True
    else:
        k = -1
    return k == N - 1

def proba(p, N, n):
    cases = 0
    for i in range(n):
        if experience(p, N):
            cases += 1
    return cases / n
```

Exercice 14

Pour la question 1, la question est simple donc la rédaction doit être propre.
Pour la question 2, il faut lire l'énoncé. Pour la question 2a, on développe. Pour la question 2b, on passe (E) au carré, donc le membre de droit de l'expression de la question a. D'après la question 1, on sait que les termes sont positifs donc tous les termes sont nuls et donc les coordonées de V sont de même signe.
Pour la question 3, on utilise le même procédé que pour la 2 :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^N v_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^N v_i\right)\left(\sum_{j=1}^N v_j\right) \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant N} v_i v_j \\
&= \sum_{i=1}^N v_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j<N} v_i v_j.
\end{aligned}$$

Pour la question 4, on a $\dfrac{1-\rho}{N} > 0$ donc $G_{i,j} > 0$ pour tout i, j.
Pour les questions 5 et 6, on a une disjonction de cas. Pour la question 5, on utilise la définition de $A_{i,j}$ ce qui annule des termes. Pour la question 6, on remplace $A_{i,j}$ et on simplifie.
Pour la question 7, G est une matrice stochastique.
Pour la question 8, on développe la matrice et on utilise la défintion du PageRank.

La notation $P(A \mid B)$ représente $P_B(A)$; $1-\rho$ représente la probabilité de rentrer une nouvelle URL.
Pour la question 9, on utilise les propriétés de la probabilité P et que $A_n^1, \ldots, A_n^N$ représente un système complet d'événements.
Pour la question 10,

$$\begin{aligned} P(A_n^i \cap A_{n-1}^j) &= P(A_n^i \mid A_{n-1}^j)\, P(A_{n-1}^j) \\ &= G_{i,j}(V_{n-1})_j. \end{aligned}$$

Pour la question 11, on utilise les probabilités totales et le calcul précédent ; on obitient un produit matriciel.
Pour la question 12, pour le faire proprement, on peut faire une récurrence.

On cherche la limite de V_k et donc la limite de G^n.

Pour la question 13, on pose $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on résout le système associé.

Pour la question 14, on trouve parmi les solutions de la question 13 le vecteur de probabilité.

Pour retrouver le résultat de la question 15, on peut utiliser une équation polynomiale. Par exemple, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

on pose

$$P = X^2 - 5X + 6.$$

En évaluant $X = A$, on a

$$A^2 - 5A + 6I_2 = (0).$$

Pour trouver P, on a

$$P = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A).$$

On a

$$X^n = (X^2 - 5X + 6)Q_n(X) + (a_n X + b_n).$$

et $A^n = a_n A + b_n I_n$.

Exercice 13

L'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ est le nombres de nombres premiers inférieurs à n :

$$\varphi(n) = \#\{k \in [\![1,n]\!] \mid k \wedge n = 1\} = \#\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times\}.$$

1. On a

$$P(A_p) = \frac{\#A_p}{\#\Omega} = \frac{n/p}{n} = \frac{1}{p}.$$

2. On suppose $p \wedge q = 1$.

$$P(A_p \cap A_q) = \frac{\#(A_p \cap A_q)}{\#\Omega} = \frac{\frac{n}{pq}}{n} = \frac{1}{pq} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} = P(A_p) \times P(A_q).$$

3.

$$\bar{B} = \bigcup_{\substack{p \text{ premier} \\ p \mid n}} A_p$$

donc

$$B = \bigcap_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \bar{A}_p.$$

Montrons que les $(\bar{A}_p)_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}}$ sont muntuellement indépendants.
Soient $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers divisant n distincts 2 à 2.

$$\begin{aligned}
P(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_r}) &= \frac{\frac{n}{p_1 \times \dots \times p_r}}{n} \\
&= \frac{1}{p_1 \times \dots \times p_r} \\
&= \prod_{i=1}^{r} P(A_{p_i})
\end{aligned}$$

Donc,

$$P(B) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} P(\bar{A}_p) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

On en déduit que

$$\#B = \#\Omega\, P(B) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Exercice 11

1. On pose, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, U_k : “l'urne k a été choisie” ; et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n : “la n-ième boule tirée est blanche”.

$$P\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \frac{P(B_{n+1} \cap B_1 \cap \dots \cap B_n)}{P(B_1 \cap \dots \cap B_n)}.$$

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap \dots \cap B_n) &= \sum_{k=0}^{N} P_{U_k}(B_1 \cap \dots \cap B_n)\, P_(U_k) \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap \dots \cap B_{n+1}) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} ; \\
P_{B_1 \cap \dots \cap B_n}(B_{n+1}) &= \frac{1}{N} \times \frac{\sum_{k=1}^{N} k^{n+1}}{\sum_{k=1}^{N} k^n}.
\end{aligned}$$

On pose $f : x \mapsto x^n$.

$$\sum_{k=1}^{N} k^n \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{N^{n+1}}{n+1}$$

et donc

$$P_{B_1\cap\cdots\cap B_n}(B_{n+1}) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{N}\times N\times\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{n+1}{n+2}.$$

Exercice 1

Analyse Soient P une probabilité sur $[\![1,n]\!]$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que

$$\forall k,\ P(\{k\}) = \alpha k.$$

D'où,

$$\begin{aligned}1 = P\big([\![1,n]\!]\big) &= P\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{n}}\{k\}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}P(\{k\}) = \alpha\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \alpha\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

et donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Synthèse On pose $\alpha = \dfrac{2}{n(n+1)}$ et

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\,, p_k = \alpha k.$$

On remarque que

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\,, p_k \geqslant 0$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}p_k = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)}{2} = 1.$$

D'après un résultat du cours, il existe une probabilité P sur $[\![1,n]\!]$ telle que

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\,,\ P(\{k\}) = p_k = \alpha k.$$

Exercice 3

1.

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= P(A)+P(B)-\overbrace{P(A\cup B)}^{\in[0,1]}\\ &\geqslant P(A)+P(B)-1\end{aligned}$$

2. par récurrence sur n :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \\ &\geqslant P\left(\bigcap_{i=1}^{n} a_i\right) + P(A_{n+1}) - 1 \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) + P(A_{n+1}) - 1 \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - n. \end{aligned}$$

Exercice 4

On pose $\Omega_n = [\![1, 365]\!]^n$, P_n l'équiprobabilité sur Ω_n et

$$\bar{A}_n = \left\{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n \mid \forall i \neq j, \omega_i \neq \omega_j\right\}.$$

$$\begin{aligned} P_n(A_n) &= 1 - P_n(\bar{A}_n) \\ &= 1 - \frac{365!}{(365-n)!\, 365^n} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} P_n(A_n) \geqslant \frac{1}{2} &\iff n \geqslant 23 \\ P_n(A_n) \geqslant 0{,}95 &\iff n \geqslant 47. \end{aligned}$$

Exercice 5

1. On a

$$\bar{A} = \{f\}^n \cup \{g\}^n$$

donc

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &= 1 - \frac{2}{2^n} \\ &= \frac{2^n - 2}{2^n}. \end{aligned}$$

Et,

$$B = \{g\}^n \cup \{(f, g, \ldots, g)\} \cup \{(g, f, g, \ldots, g)\} \cup \cdots \cup \{(g, \ldots, g, f)\}$$

donc $P(B) = \dfrac{n+1}{2^n}$.

2. $P(A \cap B) = \dfrac{n}{2^n}$ et $P(A)\,P(B) = \dfrac{2^n - 2}{2} \times \dfrac{n+1}{2^n}$ d'où

$$\begin{aligned} & P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \\ \iff & n2^n = (2^n - 2)(n+1) \\ \iff & 2^n - 2n - 2 = 0 \\ \iff & 2^{n-1} - n - 1 = 0? \end{aligned}$$

Soit $f : x \mapsto 2^{x-1} - x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(2)2^{x-1} - 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \iff & 2^{x-1} > \frac{1}{\ln 2} \\ \iff & (x-1)\ln 2 > \ln\left(\frac{1}{\ln 2}\right) \\ \iff & x > \frac{-\ln(\ln 2)}{\ln 2} + 1 \simeq 1{,}5. \end{aligned}$$

Donc, f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

x	0		$-\dfrac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}$		3		$+\infty$
f	< 0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Donc $n = 3$ est la seule solution de $(*)$.

Exercice 6

Soit (Ω, P) un espace probabilisé qui modélise cette situation.

$$\forall i \in \{1,2,3\},\ \begin{cases} P(A_i) = \dfrac{1}{3} \\ P_{A_i}(R_i) = 1 - \alpha_i. \end{cases}$$

1. Soit $i \in \{1,2,3\}$.

$$\begin{aligned} P_{\bar{R}_i}(A_i) &= \frac{P_{A_i}(\bar{R}_i)\ P(A_i)}{P_{A_i}(\bar{R}_i)\,P(A_i) + P_{\bar{A}_i}(\bar{R}_i)\,P(\bar{A}_i)} \\ &= \frac{\frac{\alpha_i}{3}}{\frac{\alpha_i}{3} + \frac{2}{3}} \\ &= \frac{\alpha_i}{2 + \alpha_i} \end{aligned}$$

2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{2+x}$ dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = \frac{2 + \cancel{x} - \cancel{x}}{(2+x)^2} > 0.$$

x	0	1
f	0 $\nearrow$	$\frac{1}{3}$

Exercice 8

Soit (Ω, P) un espace probabilisé qui modélise cette situation,

$$\forall i \in [\![1,10]\!],\ D_i : \text{“le wagon } i \text{ a un défaut”}.$$

On a

$$\forall i \in [\![1,10]\!],\ P(D_i).$$

Les événements $(D_i)_{i \in [\![1,10]\!]}$ sont mutuellement indépendants pour P.

On pose

$$\forall i \in [\![1,10]\!],\ \forall j \in \{1,2\},\ C_{i,j} : \text{“le contrôleur } j \text{ détecte un défaut dans le wagon } i\text{”},$$

$$\forall i \in [\![1,10]\!],\ \forall j \in \{1,2\},\ P_{D_i}(C_{i,j}) = \frac{7}{10}$$

et, pour tout $i \in [\![1,10]\!]$, $C_{i,1}$ et $C_{i,2}$ sont indépendants pour P_{D_i}.

1. On note R : “le train est retardé”. On a

$$\bar{R} = \bigcap_{\substack{i \in [\![1,10]\!] \\ j \in \{1,2\}}} \bar{C}_{i,j}.$$

On note, pour $I \in \mathscr{P}\big([\![1,10]\!]\big)$,

$$\mathscr{D}_I = \left(\bigcap_{i \in I} D_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \notin I} \bar{D}_i \right).$$

$(\mathscr{D}_I)_{I \in \mathscr{P}([\![1,10]\!])}$ est un système complet d'événements.

$$P(\bar{R}) = \sum_{I \in \mathscr{P}([\![1,10]\!])} P_{\mathscr{D}_I}(\bar{R}) P(\mathscr{D}_I).$$

Soit $I \in \mathscr{P}([\![1,10]\!])$.

$$\begin{aligned} P(\mathscr{D}_i) &= \prod_{i \in I} \frac{1}{10} \prod_{i \notin I} \frac{9}{10} \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^{\#I} \left(\frac{9}{10}\right)^{10-\#I} \\ &= \frac{9^{10-\#I}}{10^{10}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_{\mathscr{D}_I}(\bar{R}) &= P_{\mathscr{D}_I}\left(\bigcap_{i\in I}\bar{C}_{i,j}\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{10}\right)^{\#I}\right)^2\\
&= \left(\frac{3}{10}\right)^{2\#I}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
P(\bar{R}) &= \sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,10]\!])}\left(\frac{3}{10}\right)^{2\#I}\frac{9^{10-\#I}}{10^{10}}\\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,10]\!])}\frac{1}{100^{\#I}}\\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\sum_{k=0}^{10}\sum_{\substack{I\in\mathscr{P}([\![1,10]\!])\\ \#I=k}}\frac{1}{100^k}\\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{100^k}\binom{10}{k}\\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^{10}\left(1+\frac{1}{100}\right)^k\\
&= \left(\frac{909}{1000}\right)^{10}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
P(R) &= 1-P(\bar{R})\\
&= 1-\left(\frac{909}{1000}\right)^{10}\\
&\simeq 0{,}615
\end{aligned}
$$

2. On pose $\mathscr{D} = \bigcup_{\substack{I\subset[\![1,10]\!]\\ I\neq\varnothing}}\mathscr{D}_I$.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathscr{D}}(\bar{R}) &= \frac{P(\bar{R}\cap\mathscr{D})}{P(\mathscr{D})}\\
&= \frac{\sum_{I\subset[\![1,10]\!]}P_{\mathscr{D}_I}(\bar{R}\cap\mathscr{D})\,P(\mathscr{D}_I)}{1-P(\mathscr{D}_\varnothing)}\\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{10}}\sum_{I\subset[\![1,10]\!]}\frac{9^{10-\#I}}{10^{10}}\times\left(\frac{2}{10}\right)^{2\#I}\\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{10}}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\sum_{k=1}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{100}\right)^k\\
&= \frac{9^{10}}{10^{10}-9^{10}}\left(\left(\frac{101}{100}\right)^{10}-1\right)\simeq 0{,}06
\end{aligned}
$$

Exercice 9

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant \frac{1}{2} \\
\iff & n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leqslant \ln(\frac{1}{2}) \\
\iff & n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \\
\iff & n \geqslant 4
\end{aligned}$$

Exercice 12

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= q(1-p_n) + pp_n \\
&= (1-p)(1-p_n) + pp_n \\
&= p_n(2p-1) + 1 - p
\end{aligned}$$

On a

$$p_n = \alpha(2p-1)^n + \frac{1}{2}$$

car

$$\begin{aligned}
& x = x(2p-1) + 1 - p \\
\iff & x(2p-2) = p - 1 \\
\iff & x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a $p_1 = 1$ donc

$$\begin{aligned}
& \alpha(2p-1) + \frac{1}{2} = 1 \\
\iff & \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{2p-1} = \frac{1}{4p-2}
\end{aligned}$$

On a donc

$$p_n = \frac{1}{4p-2}(2p-1)^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2p-1)^{n_1} + \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Méthode : suites arithmético-géométriques

On a

$$\forall n,\ u_{n+1} = au_n + b.$$

L'application

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\
(u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n)
\end{aligned}$$

est linéaire. On a donc,

$$\varphi(u) = (b)_{n\in\mathbb{N}} \iff \overset{\text{Ker}\,\varphi}{\overset{\cap}{u}} + \underbrace{u_0}_{\text{suite constante}} .$$

On a $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}\big((a^n)\big)$.