Chapitre 25

Série

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Défintions et premières propriétés

Définition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La suite des sommes partielles associée à (u_n) est

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Étudier la série des (u_n), c'est étudier la convergence de la suite (S_n).

On dit que la série $\sum u_n$ converge si (S_n) converge. Dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et on l'appelle la somme de la série, et la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

est appelée suite des restes partiels.

Exemple (À connaître : série géométrique):
Soit $q \in \mathbb{C}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q_k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas $\sum_{k=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Par exemple, avec $q = 1/2$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

et

$$\begin{aligned} R_n &= 2 - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 2 - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2 - 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Proposition: Soit $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si (v_n).

Preuve:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_k.$$

□

Proposition: Soit $\sum u_n$ une série.
SI $\sum u_n$ converge ALORS $u_n \longrightarrow 0$.

REMARQUE:
La réciproque est FAUSSE.

CONTRE-EXEMPLE (série harmonique):
La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En effet, on a vu en T.D. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

où γ est la constante d'Euler.

Preuve:
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On suppose que (S_n) converge vers $S \in \mathbb{C}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} S - S = 0.$$

□

REMARQUE:
Avec les notations précédentes, si $u_n \not\longrightarrow 0$, alors $\sum u_n$ diverge. On dit qu'elle diverge grossièrement.

Deuxième partie

Séries à termes positifs

Proposition: Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$. Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Preuve:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0.$$

□

Théorème: Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{0 \leqslant u_n} \leqslant v_n.$$

1. SI $\sum v_n$ converge, ALORS $\sum u_n$ converge
2. SI $\sum u_n$ diverge, ALORS $\sum v_n$ diverge.

Preuve: 1. On suppose que $\sum v_n$ converge. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(v) = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Donc $\big(S_n(v)\big)$ est majorée. Soit V un majorant et $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall k, 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k = S_n(v) \leqslant V$$

donc $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Or, elle est croissante, donc elle converge.

2. C'est la contraposée du 1.

□

CONTRE-EXEMPLE:
$\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (vers $\frac{\pi^2}{6}$) et

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Corollaire: Soient u, v deux suites réelles POSITIVES telles que $u = O(v)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

□

Théorème: Soient u et v deux suites réelles POSITIVES telles que $u = o(v)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

□

Théorème (règle des équivalents)**:** Soient u et v deux suites réelles POSITIVES telles que $u \sim v$. Alors
$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge.}$$

Preuve:
On suppose
$$u_n = v_n + o(v_n)$$
et donc
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$
En particulier, on peut considerer $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, -\frac{1}{2}v_n \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2}v_n$$
et donc
$$\forall n \geqslant N, \frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n$$
et donc $\begin{cases} u = O(v), \\ v = O(u). \end{cases}$

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge car $u = O(v)$.
Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge car $v = O(u)$. □

Exemple:
Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n^3 + n\ln(n)}$ *?*
$$\forall n \geqslant 3, \frac{1}{n^3 + n\ln n} \geqslant 0.$$
et
$$\frac{1}{n^3 + n\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$
$$\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$$
$\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{1}{n^3}$ converge donc $\sum \frac{1}{n^3 + n\ln n}$ converge.

Troisième partie

Comparaison avec une intégrale

Théorème: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Dans ce cas, on note

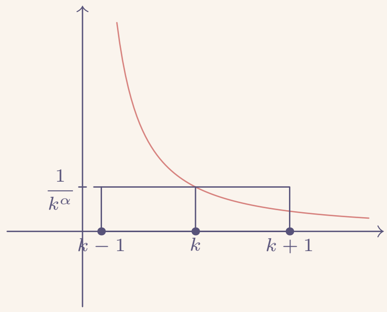
$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Preuve:

$$\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \leqslant 0$.

On suppose $\alpha > 0$. Soit $f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \end{array}$



Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. comme f_α est décroissante,

$$\forall k \in [k, k+1], f_\alpha(x) \leqslant f_\alpha(k)$$

et donc

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^\alpha}.$$

De même,

$$\forall k \in [k-1, k], f_\alpha(x) \geqslant f_\alpha(k)$$

et donc

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^\alpha}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$$

donc

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$$

<u>Cas 1</u> On suppose $\alpha > 1$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}x = 1 + \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}.\end{aligned}$$

La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_n$ est croissante et majorée donc elle converge.

<u>Cas 2</u> On suppose $\alpha = 1$.

$$\forall n \geqslant 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \geqslant \underbrace{1 + \ln(n+1) - \ln 2}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Par comparaison, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

<u>Cas 3</u> On suppose $\alpha > 1$.

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\geqslant 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\ \mathrm{d}x \\ &\geqslant 1 + \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_2^{n+1} \\ &\geqslant \underbrace{1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ car } \alpha<1}\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

□

Théorème: Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, décroissante de limite nulle, avec $a \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\sum_{n\geqslant a} f(n) \text{ converge} \iff \left(\int_a^n f(x)\ \mathrm{d}x\right)_n \text{ converge.}$$

Preuve:
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant a+1$.

$$\forall x \in [k, k+1], f(x) \leqslant f(k)$$

donc

$$\int_k^{k+1} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\ \mathrm{d}x = f(k)$$

et

$$\forall x \in [k-1, k], f(x) \geqslant f(k)$$

et donc
$$\int_{k-1}^{k} f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\ \mathrm{d}x = f(k).$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant a+1$
$$\int_{a+1}^{n+1} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \sum_{a+1 \leqslant k \leqslant n} f(k) \leqslant \int_{a}^{n} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

<u>Cas 1</u> On suppose que $\left(\int_a^n f(x)\ \mathrm{d}x\right)_n$ converge. Cette suite est croissante, donc majorée. Soit M un majorant donc
$$\forall n \geqslant a+1, \sum_{a \leqslant k \leqslant n} f(k) \leqslant f(a) + M.$$

donc la série converge.

— On suppose que $\left(\int_a^n f(x)\ \mathrm{d}x\right)_n$ diverge donc, par croissance de cette suire,
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^n f(x)\ \mathrm{d}x = +\infty$$

et donc
$$\begin{aligned}\forall n \geqslant a+1, \sum_{k=a}^{n} f(k) &= f(a) + \sum_{k=a+1}^{n} f(k) \\ &\geqslant \underbrace{f(a) + \int_a^n f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^{a+1} f(x)\ \mathrm{d}x}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}\end{aligned}$$

donc la série diverge.

$\square$

Exercice:
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ *?*

Exercice:
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\ln^{\alpha}(n)}{n^{\beta}}$ *en fonction de* α *et* β *?*

Quatrième partie

Opérations sur les séries

Proposition: L'ensemble $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et

$$\begin{aligned} S : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{aligned}$$

est une forme linéaire. □

Remarque:
La somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge. Le produit d'une série divergente par un scalaire non nul diverge.

Cinquième partie

Séries absolument convergente

Théorème: Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. SI $\sum |u_n|$ converge, ALORS $\sum u_n$ converge.

REMARQUE:
La réciproque est FAUSSE. On a vu en exercice que la <u>série harmonique alternée</u> $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln 2$, alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Preuve: <u>CAS 1</u> On suppose $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

et

$$u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } u_n > 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n^+ \geqslant 0, \\ u_n^- \geqslant 0, \\ u_n = u_n^+ - u_n^-, \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^-. \end{cases}$$

On suppose que $\sum |u_n|$ converge. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n^+ \leqslant u_n^+ + u_n^- = |u_n|$$

donc $\sum u_n^+$ converge. De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n^- \leqslant u_n^- + u_n^+ = |u_n|$$

donc $\sum u_n^-$ converge. Par linéarité, $\sum u_n$ converge.
<u>CAS 2</u> $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum |u_n|$ converge. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_n = \mathfrak{Re}(u_n) \in \mathbb{R} \\ w_n = \mathfrak{Im}(u_n) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |v_n| \leqslant |u_n|$$

donc $\sum |v_n|$ converge donc d'après le CAS 1, $\sum v_n$ converge.
De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |w_n| \leqslant |u_n|$$

donc $\sum w_n$ converge.
Par linéarité, $\sum u_n$ converge.

□

Définition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ <u>converge absolument</u> si $\sum |u_n|$ converge. On dit que $\sum u_n$ est <u>semi-convergente</u> si

$$\begin{cases} \sum u_n \text{ converge,} \\ \sum |u_n| \text{ diverge.} \end{cases}$$

Corollaire: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ telles que $u = O(v)$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument. $\square$

Exemple:
Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ *?*

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n^2}\left|\sin\frac{1}{n}\right| \sim \frac{1}{n^3}$$

donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

Exemple:
Quelle est la nature de $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ *?*

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$(-1)^n \sin\frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge.

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Par linéarité, $\sum (-1)^n \sin\frac{1}{n}$ converge.

Sixième partie

Séries alternées

Théorème: Soit $u \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Preuve:
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$$

Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

— Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1}u_{2n+1} + (-1)^{2n+2}u_{2n+2} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $(S_{2n})_n$ est décroissante.

— Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0$$

Donc la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante.

— $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent et ont la même limite, donc (S_n) converge. On note $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_{2n+1} \geqslant 0 \geqslant R_{2n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_{2n+1}| = R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1},$$

$$|R_{2n}| = -R_{2n} = S_{2n} - S \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leqslant u_n.$$

□

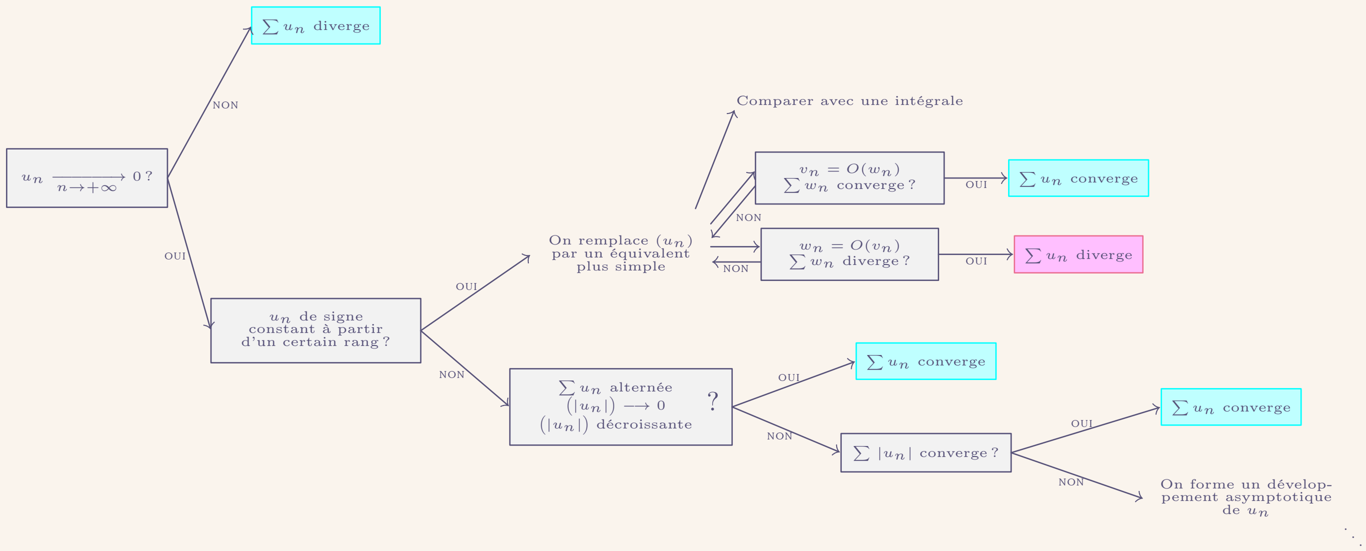
Proposition: Soit u une suite de signe constant telle que $\left(|u_n|\right)_n$ est décroissante de limite nulle. Alors, $\sum(-1)^n u_n$ converge et

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n \text{ est du signe de } (-1)^{n+1}u_{n+1} \text{ et } |R_n| \leqslant |u_n|$$

□

Septième partie

Résumé et exemples


$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?
NON
$\sum u_n$ diverge
OUI
u_n de signe constant à partir d'un certain rang ?
OUI
On remplace (u_n) par un équivalent plus simple
Comparer avec une intégrale
$v_n = O(w_n)$
$\sum w_n$ converge ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
$w_n = O(v_n)$
$\sum w_n$ diverge ?
OUI
$\sum u_n$ diverge
NON
NON
$\sum u_n$ alternée
$(|u_n|) \longrightarrow 0$
$(|u_n|)$ décroissante
?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
$\sum |u_n|$ converge ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
On forme un développement asymptotique de u_n
$\ddots$

Exercice: 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$,

2. $\forall n \geqslant 2$, $u_n = u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$,

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$,

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f_n : x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$$
donc
$$\forall x > 0, f_n'(x) = \frac{1}{nx}e^{\frac{1}{n}\ln(x)} = \frac{1}{nx}e^{\frac{1}{n}\ln x}.$$
D'après le théorème des accroissements finis,
$$\exists c_n \in [n, n+1], f_n(n+1) - f(n) = f_n'(c_n)$$
donc
$$u_n = \frac{1}{c_n}e^{\frac{1}{n}\ln c_n}.$$
$$\forall n, 1 \leqslant \frac{c_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$
donc $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $c_n = n + o(n)$:
$$\begin{aligned}\ln c_n &= \ln\big(n + o(n)\big)\\ &= \ln\Big(n\big(1 + o(1)\big)\Big)\\ &= \ln n + \ln\big(1 + o(1)\big)\\ &= \ln(n) + o(1)\\ &\sim \ln n\end{aligned}$$
donc $\frac{\ln c_n}{n} \sim \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc $e^{\frac{1}{n}\ln c_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$
donc $u_n \sim \frac{1}{n^2}$
donc $\sum u_n$ converve.

2.
$$\forall n \geqslant 2, u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument. Donc, $\sum u_n$ converge.

3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n} \geqslant 0$ donc $\sum u_n$ diverge.

4.
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \underbrace{\zeta(\alpha)}_{>0} & \text{si } \alpha > 1,\\ +\infty & \text{si } \alpha \leqslant 1,\end{cases}$$
donc
$$u_n \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\zeta(\alpha)} \neq 0 & \text{si } \alpha > 1,\\ 0 & \text{si } \alpha \leqslant 1\end{cases}$$
Si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ diverge. On suppose $\alpha \leqslant 1$.

Équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$?

Si $\alpha < 1$,

$$\underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}\right)}_{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} = \int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)}_{\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

donc

$$u_n \sim \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

$$\begin{aligned}\sum u_n \text{ converge } &\iff 1-\alpha > 1\\ &\iff \alpha < 0\end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ et donc $u_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$.

A-t-on $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ avec $\beta > 1$ ou $\dfrac{1}{n^\beta} = o(u_n)$ avec $\beta \leqslant 1$?

Si $\beta \geqslant 0$,

$$n^\beta u_n \sim \frac{n^\beta}{\ln(n)} \longrightarrow +\infty$$

En particulier avec $\beta = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = o(u_n)$$

et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge car $\dfrac{1}{2} < 1$. Donc, $\sum u_n$ diverge.

On a donc

- avec $\alpha \leqslant 0$, $\sum u_n$ converge,
- avec $\alpha > 0$, $\sum u_n$ diverge.

Huitième partie

Applications

VIII.1 Formule de Stirling

Proposition: On a :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n ?.$$

Preuve:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

$x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [k, k+1], \ln x \geqslant \ln k$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_k^{k+1} \ln x \, \mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1} \ln k \, \mathrm{d}x = \ln k$$

et

$$\forall k \geqslant 2, \forall x \in [k-1, k], \ln x \leqslant \ln k$$

et docn

$$\forall k \geqslant 2, \int_{k-1}^{k} \ln x \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} \ln k \, \mathrm{d}x = \ln k$$

Ainsi

$$\forall n \geqslant 2, \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=2}^{n} \leqslant \int_2^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x$$

Or

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2, \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x &= [x \ln x]_0^n \\
&= n\ln(n) - n + 1 \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n \\
\int_2^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x &= (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln(2) + 2 \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\ln(n+1) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\ln(n+1) &= \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\sim \ln n
\end{aligned}$$

Donc

$$\ln(n!)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$$

Cependant, on a un problème :

$$\ln(n!) = n\ln n + o(n\ln n)$$
$$\text{donc } n! = n^n \underbrace{e^{o(n\ln n)}}_{?}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n!) - n\ln n$$

(u_n) a même nature que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n \\
&= n\big(\ln n - \ln(n+1)\big) \\
&= n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&\sim -\frac{n}{n+1} \sim -1 < 0
\end{aligned}$$

$\sum(-1)$ diverge donc (u_n) diverge.

Conjecture

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \underbrace{\sim}_{\substack{\downarrow \\ \text{On n'a absolument pas le droit !}}} \sum_{k=1}^{n-1}(-1) = -(n-1) \sim -n$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + n$$

et donc

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n &= n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + 1 \\
&= n\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right)\right) + 1 \\
&= n\left(-\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{2n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 1 \\
&= -\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n} \times \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= -\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 1 \\
&= \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\sim \frac{1}{2n} > 0.
\end{aligned}$$

$$v_n \sim \sum_{k=1}^{n-1}(v_{k-1} - v_k) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2}\ln(n)$$

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = v_n - \frac{1}{2}\ln n$$
et donc
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n &= n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\ln(n+1) + \frac{1}{2}\ln(n) + 1\\
&= n\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)\right)\\
&\quad + 1 + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\\
&= -1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{3(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&\quad + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + 1\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \qquad \sim -\frac{1}{12(n+1)^2}\\
&\sim -\frac{1}{12n^2} < 0\end{aligned}$$
donc $\sum(w_{n+1}-w_n)$ converge et donc (w_n) converge.

On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \ell + o(1)$$
et donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ell + o(1)$$
et alors
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, n! &= n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{\ell}\underbrace{e^{o(1)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}\\
&\sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \times K\end{aligned}$$
avec $K = e^{\ell}$.

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
et (c.f. TD5 / Exercice 8)
$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}I_{2n} &\sim \frac{\pi}{2}\cancel{\left(\frac{2n}{2e}\right)^{2n}}\sqrt{2n}K\cancel{\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}}\frac{1}{n} \times \frac{1}{K^2}\\
&\sim \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}.\end{aligned}$$
Or
$$I_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Donc

$$\frac{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}}{\frac{\pi}{K\sqrt{2n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc

$$\frac{K}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et donc $K = \sqrt{2\pi}$. □

VIII.2 Développement décimal

Exemple:
- Avec $x = 0,54\underline{54}\ldots$, que vaut $2x$?
- Avec $x = 0,333\underline{3}\ldots$, que vaut $3x$?
  - $0.999\underline{9}\ldots$?
  - $3 \times \frac{1}{3} = 1$?

Proposition: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbb{Z}, \\ \forall n \geqslant 1, a_n \in [\![0,9]\!] \end{cases}$$

La série $\sum \frac{a_n}{10^n}$ converge.

Preuve:

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant \frac{a_n}{10^n} \leqslant \frac{9}{10^n}$$

$\sum \frac{1}{10^n}$ converge car $\frac{1}{10} \in [0,1[$. Donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{10^n}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{10^n}$ converge. □

Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x admet un <u>développement décimal</u> si

$$\exists a_0 \in \mathbb{Z}, (a_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^N, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Théorème: Tou réel $x \in [0,1[$ admet un développement décimal :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor 10^n x\rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1}x\right\rfloor}{10^n}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1, \qquad & 10^n x - 1 < \lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x \\ & -10^n x + 10 > -10\left\lfloor 10^{n-1}x\right\rfloor \geqslant -10^n x \end{aligned}$$

donc
$$-1 < \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor < 10$$
et donc
$$\lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \in [\![0, 9]\!] .$$

De plus,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor 10^k x \rfloor - 10 \lfloor 10^{k-1} x \rfloor}{10^k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lfloor 10^k x \rfloor}{10^k} - \frac{\lfloor 10^{k-1} x \rfloor}{10^{k-1}} \right) \\ &= \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} - \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=0} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} x.\end{aligned}$$

□

Théorème: Soit $x \in]0, 1[$.

1. Si x n'est pas décimal (i.e. on ne peut pas l'écrire comme $p/10^n$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$), alors x a un unique développement décimal.
2. Si x est décimal, alors x a exactement 2 développements décimaux :
   — il y en a un où, à partir d'un certain rang, tous les chiffres sont nuls,
   — et un autre où tous les chiffres sont égaux à 9 à parir d'un certain rang.

Preuve:
Soit $(a_n)_{n \geqslant 1} \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1} \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ telles que
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$$
On pose $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \neq b_n\}$:
$$\begin{cases} \forall n < n_0, a_n = b_n, \\ a_{n_0} \neq b_{n_0}. \end{cases}$$
Sans perte de généralité, on suppose $a_{n_0} < b_{n_0}$. On a donc
$$0 < \frac{b_{n_0} - a_{n_0}}{10^{n_0}} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n}$$

$$\forall n \geqslant n_0, \begin{cases} 0 \leqslant a_n \leqslant 9 \\ 0 \leqslant b_n \leqslant 9 \end{cases}$$
donc
$$\forall n \geqslant n_0, -9 \leqslant a_n - b_n \leqslant 9$$
donc
$$-9 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} \leqslant 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\frac{1}{10^n} &= \frac{1}{10^{n_0+1}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n}\\ &= \frac{1}{10^{n_0+1}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\\ &= \frac{1}{9\times 10^{n_0}}\end{aligned}$$

D'où,

$$0<\frac{b_{n_0}-a_{n_0}}{10^{n_0}}\leqslant\frac{1}{10^{n_0}}$$

donc

$$0<\underbrace{b_{n_0}-a_{n_0}}_{\in\mathbb{Z}}\leqslant 1$$

donc $b_{n_0}-a_{n_0}=1$ et donc

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\frac{a_n-b_n}{10^n}=\frac{1}{10^{n_0}}$$

donc

$$\forall n>n_0, a_n-b_n=9$$

et donc

$$\forall n>n_0, \begin{cases}a_n=9\\ b_n=0\end{cases}$$

Comme

$$\forall n>n_0, b_n=0$$

x est décimal et les deux développements de x sont alors

$$\begin{aligned}x &= 0, a_1\dots a_{n_0-1}a_{n_0}\underline{9}\dots\\ &= 0, a_1\dots a_{n_0-1}(a_{n_0}+1)\underline{0}\dots\end{aligned}$$

□

Remarque:
Avec $x=0{,}54\underline{54}\dots$, $100x=54{,}54\underline{54}\dots=54+x$. On a donc $x=\frac{54}{99}$.

Avec $x=0{,}987\,123\,\underline{123}\dots$, on a

$$\begin{aligned}x &= \frac{987}{1000}+0{,}000\,\underline{123}\dots\\ &= \frac{987}{1000}+\frac{1}{10^3}\underbrace{(0{,}\underline{123}\dots)}_{y}\end{aligned}$$

On a $1000y=123+y$ et donc $y=\frac{123}{999}$ et donc $x=\frac{987+\frac{123}{999}}{1000}$.

VIII.3 Exponentielle

Proposition:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Preuve:
(formule de Taylor avec reste intégral)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n} \, \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| &\leqslant \int_0^x e^t \frac{|x-t|^n}{n!} \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^x e^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant e^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x \\
&\leqslant e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

car
Méthode 1

$$\begin{aligned}
\frac{x^n}{n!} \sim \frac{x^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ex}{n} \right)^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{n \ln\left(\frac{ex}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Méthode 2

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

□

Proposition:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

□