Chapitre 25

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 6

Nature de $\sum u_n$ où

$$\forall n, u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(\frac{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{a}{2n} + \frac{a^2}{4n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1+a}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (théorème des séries alternées). La série $\sum \frac{1+a}{2n}$ diverge sauf si $a=-1$. La série $\sum \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge absolument (car $3/2 > 1$).

Donc,

$$
\sum u_n \text{ converge} \iff a = -1
$$

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3} \times \frac{(-1)^{3n}}{n^{3/2}} + \mathcal{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + \mathcal{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1+a}{2n} + \frac{1}{3}\frac{(-1)^{3n}}{n^{3/2}} + \mathcal{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 1

1.

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.
\end{aligned}
$$

2. $e : \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ donc

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+1}{k!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1+1}{(k-1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!}\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} e + e + e = 3e.
\end{aligned}
$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k-1) - \ln(k)\big) + \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \\ &= -\ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(2) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2).\end{aligned}$$

Exercice 3

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{n\,n!}{(n+3)!} = \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sim \frac{1}{n^2}$$

$\sum u_n$ converge.

2.

$$\forall n \geqslant 2, 0 \leqslant \frac{\ln n}{n^3} = o\left(\frac{n}{n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{\ln n}{n^3}$ converge.

3. $\forall \alpha, \ln n = o(n^{\alpha})$. Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$0 \leqslant \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

donc $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

4. $\forall n \geqslant 3, \frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$ donc $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.
5. $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Exercice 7

1. — On suppose que $\sum u_n$ converge. Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $v_n \sim u_n > 0$. Donc, $\sum v_n$ converge.
   — On suppose que $\sum v_n$ converge donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\forall n,\ u_n = \frac{v_n}{1 - v_n} \sim v_n$$

   donc $\sum u_n$ converge.

2. — On suppose $\sum u_n$ convergente.

$$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{u_n}{u_1} \qquad \left(v_n \sim \frac{u_n}{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k} \right)$$

donc $\sum v_n$ converge.

— On suppose que $\sum u_n$ diverge.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(1 - v_n) &= \ln\left(\frac{u_1 + \cdots + u_{n-1}}{u_1 + \cdots + u_n}\right) \\ &= \ln\left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k\right) - \ln\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \end{aligned}$$

donc $\sum \ln(1-v_n)$ a même nature que $\left(\ln\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)\right)_n$, donc $\sum \ln(1-v_n)$ diverge.
Si $\sum v_n$ converge, alors $v_n \longrightarrow 0$ et donc $\ln(1-v) \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n \leqslant 0$ et donc $\sum \ln(1-v_n)$ converge $\lightning$.
Donc $\sum v_n$ diverge.

Exercice 2

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1+n+n^2} = \frac{n+1-n}{1+n(n+1)}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \operatorname{Arctan} n$$

et alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1+n+n^2} = \frac{\tan u_{n+1} - \tan u_n}{1 + \tan(u_{n+1})\tan(u_n)} = \tan(u_{n+1} - u_n).$$

En effet,

$$\begin{cases} 0 < u_{n+1} < \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2} < -u_n \leqslant 0 \end{cases}$$

donc

$$-\frac{\pi}{2} < u_{n+1} - u_n < \frac{\pi}{2}$$

et donc $u_{n+1} - u_n \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\operatorname{Arctan}\big(\tan(u_{n+1} - u_n)\big) = u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) &= \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) \\ &= u_{n+1} - u_n \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$$

Exercice 4

$$\forall n,\ 0 < u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}^{-\frac{\ln n}{n}} \sim \frac{1}{n}.$$

Donc, $\sum u_n$ diverge.

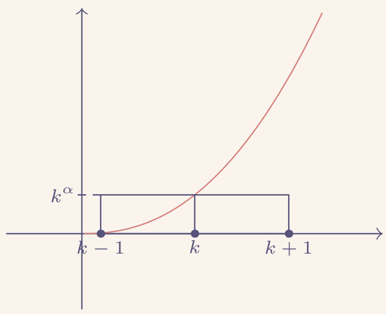
Exercice 5

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^{\beta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{-\beta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \zeta(-\beta) & \text{si } -\beta > 1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose $\beta < -1$. Alors, $0 < u_n \sim \dfrac{\zeta(-\beta)}{n^{\alpha}}$ et donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On suppose $\beta \geqslant -1$.

Cas 1 $\beta > 0$ donc $x \mapsto x^{\beta}$ est croissante.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \int_{k-1}^{k} x^{\beta}\ \mathrm{d}x \leqslant k^{\beta} \leqslant \int_{k}^{k+1} x^{\beta}\ \mathrm{d}x$$

$$\text{donc } \int_{0}^{n} x^{\beta}\ \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} k^{\beta} \leqslant \int_{1}^{n+1} x^{\beta}\ \mathrm{d}x$$

$$\text{donc } \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \leqslant \frac{(n+1)^{\beta+1}-1}{\beta+1} \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$$

et donc

$$0 < u_n \sim \frac{1}{n^{\alpha}} \times \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} \times \frac{1}{n^{\alpha-\beta-1}}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ converge } &\iff \alpha - \beta - 1 > 1 \\ &\iff \alpha > \beta + 2. \end{aligned}$$

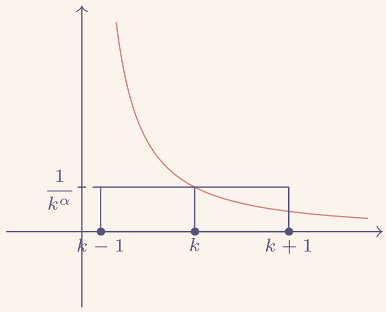
Cas 2 $\beta = 0$.

$$\forall n,\ u_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

donc

$$\sum u_n \text{ converge } \iff \alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2.$$

Cas 3 $\beta \in]-1, 0[$.



Soit $n \geqslant 2$.

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \int_k^{k+1} x^\beta \, \mathrm{d}x \leqslant k^\beta \leqslant \int_{k-1}^k x^\beta \, \mathrm{d}x$$

donc

$$\int_2^{n+1} x^\beta \, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^n k^\beta \leqslant \int_1^n x^\beta \, \mathrm{d}x$$

et donc

$$\frac{(n+1)^{\beta+1} - 2^{\beta+1}}{\beta+1} \leqslant \sum_{k=2}^n k^\beta \leqslant \frac{n^{\beta+1} - 1}{\beta+1}$$

donc

$$\sum_{k=2}^n b^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$$

et donc

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \alpha > \beta + 2.$$

Cas 4 $\beta = -1$.

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^n k^\beta \leqslant \int_1^n \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

$$\underbrace{\ln(n+1) - \ln 2}_{\sim \ln n} \leqslant \sum_{k=2}^n k^{-1} \leqslant \ln n.$$

$$0 < u_n \sim \frac{1}{n^\alpha} \ln n$$

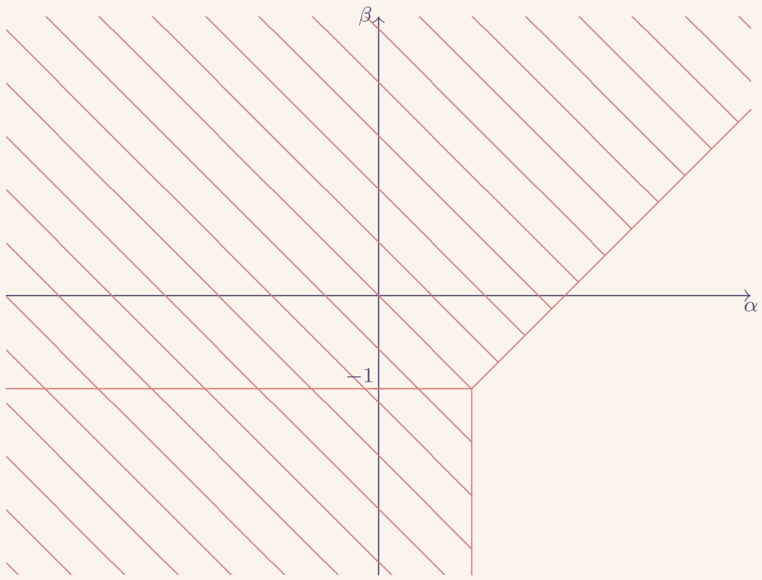
Pour $n \geqslant 3$, $\frac{\ln n}{n^\alpha} > \frac{1}{n^\alpha}$.
Si $\alpha \leqslant 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
Si $\alpha > 1$,

$$\ln n = o(n^\gamma) \text{ avec } \gamma = \frac{\alpha - 1}{2} > 0.$$

donc

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$$

et donc $\sum \frac{\ln n}{n}$ converge.



Exercice 8

$$\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant u_n \leqslant \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \begin{cases} \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}_{\sim \frac{1}{n^2}} & \text{si } \alpha = 1 \\ \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\left(\left(n^2+1\right)^{-\alpha+1} - (n^2)^{-\alpha=1}\right)}_{v_n} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Pour $\alpha \neq -1$,

$$\begin{aligned}(n^2+1)^{1-\alpha} &= n^{2(1-\alpha)}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1-\alpha} \\ &= n^{2(1-\alpha)}\left(1+\frac{1-\alpha}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$0 < v_n \sim n^{-2\alpha} = \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors $\sum v_n$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

On suppose $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ u_n &\geqslant \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{\sin^2(\pi x)}{(n^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{(n^2+1)^\alpha}\int_{n^2}^{n^2}\left(\frac{1}{2}(1-\cos(2\pi x))\right)\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{2(n^2+1)^\alpha} \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

$2\alpha < 1$ donv $\sum \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge.

Si $\alpha = 0$,

$$u_n = \int_{n^2}^{n^2+1} \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

donc $\sum u_n$ diverge.

Si $\alpha < 0$,

$$u_n \geqslant \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{\sin^2(\pi x)}{n^{2\alpha}}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

donc $\sum u_n$ diverge.

En fait, dans tous les cas, $u_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$.

Exercice 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \text{“}u_n \text{ existe et } u_n > 0\text{”}.$$

— $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$. $u_n + \frac{a_n}{u_n}$ existe car $u_n \neq 0$ donc u_{n+1} existe. On a $a_n \geqslant 0$ et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} \geqslant u_n > 0$.

$$\begin{aligned}
(u_n) \text{ converge } &\iff \sum u_{n-1} - u_n \text{ convege} \\
&\iff \sum \frac{a_n}{u_n} \text{ converge}
\end{aligned}$$

— On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ car (u_n) est *croissante*. Donc

$$\frac{a_n}{u_n} \sim \frac{a_n}{\ell}$$

donc $a_n \sim \ell \frac{a_n}{u_n}$.

Par compairaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

— On suppose que $u_n \longrightarrow +\infty$ alors $a_n \geqslant \frac{a_n}{u_n}$ à partir d'un certain rang donc $\sum a_n$ diverge.

Exercice 10

1. Oups, j'ai supprimé cette partie.
2. Si $\alpha > 0$,

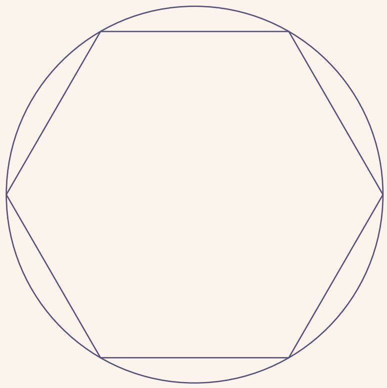
$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}} \\
&= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) \\
&= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{série alternée} \\ \text{convergente}}} \underbrace{- \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{\sim \frac{1}{n^{2\alpha}} > 0}
\end{aligned}$$

$\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.
Si $\alpha < 0$,

$$u_n = \frac{1}{1+(-1)^n n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$$

donc u_n diverge.

3.



$$\begin{aligned}
S_{6n} &= \sum_{k=1}^{6n} \ln\left(1 + \frac{\sin(k\pi/3)}{k}\right) \\
&= \sum_{a=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{6} \ln\left(1 + \frac{\sin\left(\frac{(6a+k)\pi}{3}\right)}{6a+k}\right) \\
&= \sum_{a=0}^{n-1}\left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2(6a+1)}\right) + \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2(6a+2)}\right) + \ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2(6a+4)}\right) + \ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2(6a+5)}\right)\right) \\
&= \sum_{a=0}^{n-1}\left(\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2(6a+4)} + \frac{\sqrt{3}}{2(6a+1)} - \frac{3}{4(6a+1)(6a+4)}\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2(6a+5)} + \frac{\sqrt{3}}{2(6a+2)} - \frac{3}{4(6a+2)(6a+5)}\right)\right)\right) \\
&= \sum_{a=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{6\sqrt{3}-3}{4(6a+1)(6a+4)}\right) + \sum_{a=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{6\sqrt{3}-3}{4(6a+2)(6a+5)}\right)
\end{aligned}$$

$$\ln\left(1+\frac{6\sqrt{3}-3}{4(6a+1)(6a+4)}\right) \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{6\sqrt{3}-3}{4\times 36a^2} > 0.$$

$\sum \dfrac{6\sqrt{3}-3}{4\times 36a^2}$ converge donc $\sum \ln\left(1+\dfrac{6\sqrt{3}-3}{4(6a+4)(6a+1)}\right)$ converge.

Donc (S_{6n}) converge.
$S_{6n+1} = S_{6n} + \underbrace{u_{6n+1}}_{\to 0} \longrightarrow \lim S_{6n}$
$S_{6n+2}, \dots, S_{6n+5} \longrightarrow \lim S_{6n}$
donc (S_n) converge et donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 11

$$(k_n) = (1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,\dots,18,20,\dots,).$$

$\forall n, k_n \geqslant n$ donc $\dfrac{1}{k_n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$10^{N-1} \leqslant n < 10^N.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{k_p} \leqslant \sum_{p=1}^{10^N} \frac{1}{k^p} &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{p \\ 10^{i-1} \leqslant k_p < 10^i}} \frac{1}{k^p} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{p \\ 10^{i-1} \leqslant k_p < 10^i}} \frac{1}{k^p} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{8\times 9^{i-1}}{10^{i-1}} = 8\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{9}{10}\right)^{i-1} \\
&\leqslant 8 \times \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^N}{1-\frac{9}{10}} \leqslant 80
\end{aligned}$$

(S_n) croissante et majorée donc elle converge.

Exercice 12

1. Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et

$$\forall x > 0,\ f'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t} = \frac{1-\ln t}{t^2}$$

On a $\forall t > e, f'(t) < 0$ et donc f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$.

$$\forall k \in [\![4, n]\!]\,, \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln^2(n+1) - \ln^2 4\right) \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(\ln^2 n - \ln^2 3\right).$$

Donc

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2 n + o\left(\ln^2 n\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2 n + o\left(\ln^2 n\right).$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}\ln^2 n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) + \frac{1}{2}\ln^2(n)\\
&= \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{2}\ln^2 n - \frac{1}{2}\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2\\
&= \left(\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}\ln^2 n - \frac{1}{2}\ln^2 n - \ln n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\\
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} - \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\\
&\sim \underbrace{-\frac{\ln n}{2n^2}}_{=o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)} < 0 \text{ pour } n \geqslant 2
\end{aligned}$$

Donc $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge et donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge donc (u_n) converge. On note $\ell = \lim u_n$. D'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2}\ln^2 n + \ell + o(1)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} \frac{\ln 2i}{2i} - \sum_{0 \leqslant i \leqslant N} \frac{\ln(2i+1)}{2i+1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\frac{\ln 2i}{2i} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\ln 2+\ln i}{i}\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln 2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\ln i}{i}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln 2\times\big(\ln N+\gamma+o(1)\big)+\frac{1}{2}\ln^2 N+\ell+o(1)\right)\\ &= \frac{1}{4}\ln^2 N+\frac{\ln 2}{2}\ln N+\frac{\gamma\ln 2}{2}+\frac{\ell}{2}+o(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N}\frac{\ln(2i+1)}{2i+1} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\sum_{i=1}^{N}\frac{\ln 2i}{2i}\\ &= \frac{1}{2}\ln^2 n+\ell+o(1)-\left(\frac{1}{4}\ln^2 N+\frac{\ln 2}{2}\ln N+\frac{\gamma\ln 2}{2}+\frac{\ell}{2}+o(1)\right)\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}=\frac{1}{2}\ln^2 N+\ln 2\times\ln N+\gamma\ln 2+\ell-\frac{1}{2}\ln^2 n-\ell+o(1).$$

$$N\leqslant\frac{n}{2}\leqslant N+1$$

donc

$$\frac{n}{2}-1<N\leqslant\frac{n}{2}$$

et donc

$$N\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{2}$$

$$\begin{aligned}\ln N &= \ln\left(\frac{n}{2}+o\left(\frac{n}{2}\right)\right)\\ &= \ln\left(\left(\frac{n}{2}\right)\big(1+o(1)\big)\right)\\ &= \ln\left(\frac{n}{2}\right)+\ln\big(1+o(1)\big)\\ &= \ln\left(\frac{n}{2}\right)+o(1)\\ &\sim \frac{n}{2}\end{aligned}$$

$$N\leqslant\frac{n}{2}\leqslant N+1$$

donc

$$\ln(n-2)-\ln 2=\ln\left(\frac{n}{2}-1\right)\leqslant\ln N\leqslant\ln\left(\frac{n}{2}\right)=\ln n-\ln 2$$

et donc

$$\ln^2\left(\frac{n}{2}-1\right)\leqslant\ln^2 N\leqslant\ln^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

On a, d'une part,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} &\leqslant \frac{1}{2}\left(\ln^2 n-2\ln n\ln 2+\ln^2 2\right)+\ln 2\,(\ln n-\ln 2)+\gamma\ln 2-\frac{1}{2}\ln^2 n+o(1)\\ &\leqslant -\frac{1}{2}\ln^2 2+\gamma\ln 2+o(1).\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{\ln k}{k} \geqslant \frac{1}{2}\big(\ln(n-2)-\ln 2\big)^2 + \ln 2\big(\ln(n-2)-\ln 2\big) + \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}\ln^2 n + o(1)$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln^2(n-2)-\ln^2 n\right) - \frac{1}{2}\ln^2 2 + \gamma \ln 2 + o(1).$$

Or,

$$\begin{aligned}\ln^2(n-2)-\ln^2 n &= \left(\ln n + \ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)^2 - \ln^2 n \\ &= \underbrace{2\ln n \ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\sim -4\frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0} + \underbrace{\ln^2\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\longrightarrow 0}.\end{aligned}$$

Par encadrement,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{\ln k}{k} = \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}\ln^2 2.$$

Exercice

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

En effet

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned}$$