Chapitre 17

Dimension finie

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie si E a au moins une famille génératrice finie. On dit que E est de dimension infinie sinon.

Théorème (Théorème de la base extraite)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

■

Corollaire: Tout espace de dimension finie a une base. □

Théorème (Théorème de la base incomplète)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. $\mathscr{L}$ une famille libre de E. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$$

■

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

■

Lemme: Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E telles que $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$. Alors, $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$.

■

Lemme (Lemme d'échange)**:** Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et $u \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathscr{B}_2$. Alors, il existe $v \in \mathscr{B}_2$ tel que $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ soit une base de E.

■

■

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé dimension de E est notée $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$
C'est donc aussi le nombre de coordonnées de n'importe quel vecteur dans n'importe quelle base.

Corollaire: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{L}$ une famille libre de E, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. On note $n = \dim(E)$

1. $\#\mathscr{G} \geqslant n$ et $(\#\mathscr{G} = n \implies \mathscr{G}$ est une base de $E)$
2. $\#\mathscr{L} \leqslant n$ et $(\#\mathscr{L} = n \implies \mathscr{L}$ est une base de $E)$

Corollaire: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie. $\forall i \in \mathbb{N}, e_i : x \mapsto x^i$
$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Proposition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E\times F$ est de dimension finie et $\dim(E\times F) = \dim(E) + \dim(F)$

■

Remarque (Convention):

$$\dim\left(\{0_E\}\right) = 0$$

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$

■

Proposition (Formule de Grassmann)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriels de E. Alors,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F\cap G)$$

■

Corollaire: Avec les hypothèse précédentes,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F\cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

■

Proposition: Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow F \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{aligned}$$

est bijective.
Si $\mathbb{K}$ est infini, $\mathbb{K}^n$ aussi et donc F aussi.
Si $\#\mathbb{K} = p \in \mathbb{N}_*$,

$$\begin{array}{c} \#\mathbb{K}^n = p^n \\ \shortparallel \\ \#F \end{array}$$