Chapitre 15

E/

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Définition et premières propriétés

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi interne $+$ et d'une loi $\cdot$ définie sur $\mathbb{K}\times E$ à valeurs dans E où $\mathbb{K}$ est un corps.
On dit que $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si

1. $(E,+)$ est un groupe abélien
2. (a)
$$\forall u\in E, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,$$
$$\mu\cdot(\lambda\cdot u)=(\mu\underbrace{\times}_{\times \text{ de } \mathbb{K}}\lambda)\cdot u$$
   (b) $\forall u\in E, 1_{\mathbb{K}}\cdot u=u$
3. (a)
$$\forall u\in E, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$$
$$(\lambda\cdot u)\underbrace{+}_{+ \text{ de } E}(\mu\cdot u)=(\lambda\underbrace{+}_{+ \text{ de } \mathbb{K}}\mu)\cdot u$$
   (b)
$$\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(u,v)\in E^2,$$
$$\lambda\cdot(u+v)=(\lambda\cdot u)+(\lambda\cdot v)$$

Les éléments de E sont alors appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont dits scalaires.
Par convention, $\cdot$ est prioritaire sur $+$.

Exemple:
Soit $\mathbb{K}$ corps, $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Exemple:
Soit $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

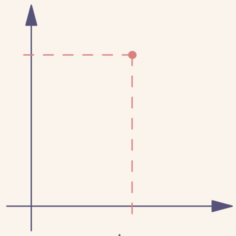
Exemple:
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
En généralisant, tout corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel pour $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$

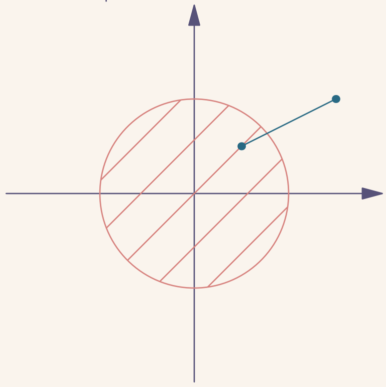
Exemple:
$(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ avec
$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
$$\lambda\cdot(y_1,\dots,y_n)=(\lambda\cdot y_1,\dots,\lambda\cdot y_n)$$
est un espace vectoriel.

Exemple:
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{D}$ un ensemble non vide.
$(E^{\mathscr{D}},+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où pour $f,g\in E^{\mathscr{D}}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$
$$f+g:\mathscr{D}\longrightarrow E$$
$$x\longmapsto f(x)+g(x)$$
$$\lambda f:\mathscr{D}\longrightarrow\mathbb{K}$$
$$x\longmapsto\lambda\cdot f(x)$$

Par exemple, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
$\mathscr{C}^0(\mathscr{D},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exemple:
- $\mathbb{R}^+$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- $\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles





Proposition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $\forall u \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$

Preuve: 1. Soit $u \in E$.

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \end{aligned}$$

$(E,+)$ est un groupe donc $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

$\lambda \cdot 0_E$ est régulier pour $+$:

$$0_E = \lambda \cdot 0_E$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ tel que $\lambda \cdot u = 0_E$

Cas 1 $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$
Cas 2 $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ Alors, $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ et donc

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u = 0_E &\implies \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \\ &\implies (\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot u = 0_E \text{ d'après 2.} \\ &\implies 1_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E \\ &\implies u = 0_E \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E$. Alors, $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$

Preuve:

$$\begin{aligned} u + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u &= (1_{\mathbb{K}} \cdot u) + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= (1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}})) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} u \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$ $\square$

Deuxième partie

Sous-espaces vectoriels

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $F \subset E$.
On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F$

Proposition: Avec les notations précédentes, $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Preuve: — D'après 2., $+$ est interne dans F

— $(E, +)$ est un groupe abélien donc $+$ est associative et commutative dans E donc dans F
— $F \neq \varnothing$. Soit $u \in F$. D'après 3.,

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$

Comme $u \in E$ et $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$$

Donc, $0_E \in F$
— Soit $u \in F$. Comme $u \in E$,

$$-u = -(1_{\mathbb{K}}) \cdot u \in F \text{ d'après 3.}$$

— Les autres axiomes sont aisément vérifiés.

□

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$.
F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in F^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " On sait déjà que F est non vide.

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \left.\begin{matrix} \lambda u \in F \\ \mu v \in F \end{matrix}\right\} \text{ donc } \lambda u + \mu v \in F$$

" $\Longleftarrow$ " — On sait déjà que F est non-vide
— Soient $u, v \in F$

$$u + v = 1_{\mathbb{K}} \cdot u + 1_{\mathbb{K}} \cdot v \in F$$

— Soit $u \in F, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$

□

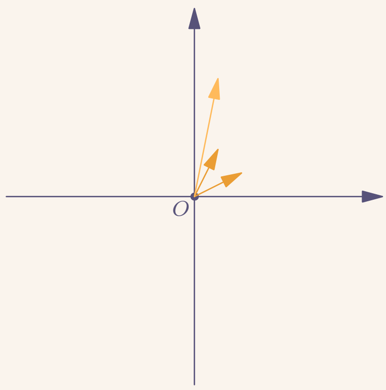
Définition: Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Une combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_n)$ est un vecteur de E de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

Remarque:
On peut aussi démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$F \neq \varnothing \text{ et } \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

Exemple:
1. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) = 1\} \subset \mathbb{C}$
   F est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$?
   Non car $0 \notin F$
2. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) = 0\}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ mais pas un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   En effet, $1 - i \in F$ $i(1-i) = i + 1 \notin F$
3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   $G = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E puique $0_E \notin G$.
4. $E = \mathbb{R}^D$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
   $F = \mathscr{C}^0(D, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E (fonctions continues)
   $G = \mathscr{D}(D, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E (fonctions dérivables)
   Si $D =]-a, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $H = \{f \in E \mid f \text{ impaire }\}$ est un sous-espace vectoriel de E
   Si $D = \mathbb{R}$, $L = \{f \in E \mid f \text{ 1-périodique }\}$ est un sous-espace vectoriel de E
   $M = \{f \in E \mid f \text{ périodique }\}$ n'est pas un sous-ensemble vectoriel de E
5. L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$

Exercice (Exercice):
Trouver tous les sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$



— $\{(0,0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
— Les droites passant par O sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$
— $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

et rien d'autre !

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\displaystyle\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve:
On pose $G = \displaystyle\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$.

— $\forall F \in \mathscr{F}, 0_E \in F$ car F est un sous espace vectoriel de E donc $0_E \in G$.

— Soient $u, v \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On pose $w = \lambda u + \mu v$.

$$\forall F \in \mathscr{F}, \quad \left.\begin{array}{r} u \in F \\ v \in F \end{array}\right\} \text{ donc } w \in F$$

donc $w \in G$

□

Remarque (Attention ⚠):
Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

Exercice:
$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit leur somme $F + G$ par

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$$

Proposition: Avec les notations précédentes, $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Preuve: — — $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$

— Soient $u \in F + G, v \in F + G, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
On pose

$$\begin{cases} u = x + y \text{ avec } \begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases} \\ \\ v = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v &= \lambda(x + y) + \mu(a + b) \\ &= \lambda x + \lambda y + \mu a + \mu b \\ &= \underbrace{(\lambda x + \mu a)}_{\in F} + \underbrace{\lambda y + \mu b}_{\in G} \in F + G \end{aligned}$$

Ainsi $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

— Soit $x \in F \cup G$.
Si $x \in F$ alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{O_E}_{\in G} \in F + G$
Si $x \in G$ alors $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} \in F + G$
Donc, $F \cup G \subset F + G$

— Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cup G \subset H$
Soit $u \in F + G$. On pose $u = x + y$ avec $\begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in F \subset F \cup G \subset H \\ y \in G \subset F \cup G \subset H \end{cases}$$

H est un sous-espace vectoriel de E donc $x + y \in H$.
On a montré que $F + G \subset H$

□

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide de sous-espaces vectoriels de E. On définit $\sum_{i\in I} F_i$ par

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} F_i &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i; (x_i) \text{ presque nulle} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i) \in \prod_{i\in I} F_i; \{i \in I \mid x_i \neq 0_E\} \text{ est fini} \right\}\end{aligned}$$

$\sum_{i\in I} F_i$ est l'ensemble de sommes finies obtenues à partir d'éléments de $\prod_{i\in I} F_i$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{R}\}$
$\sum_{i\in \mathbb{N}} F_i$ est l'ensemble des fonctions polynomiales

Proposition: Une somme quelconque de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant leur réunion. □

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall u \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, u = x + y$$

Dans ce cas, l'espace $F + G$ est noté $F \oplus G$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$
$F = \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$G = \left\{ (x, y, z) \mid (S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \right\}$$

$F \oplus G$?

— $(0, 0, 0) \in F$ car $0 \in \mathbb{R}$
  Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u = (x, 0, x) \\ v = (y, 0, y) \end{cases}$
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda u+\mu v &= \lambda(x,0,0)+\mu(y,0,y)\\ &= (\lambda x,0,\lambda x)+(\mu y,0,\mu y)\\ &= (\lambda x+\mu y,0,\lambda x+\mu y)\in F\end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de E

— $(0,0,0)\in G$ car (S) est homogène

$\begin{cases} u=(x,y,z)\in G \\ v=(a,b,c)\in G\end{cases}$

Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda u+\mu v\in G &\iff \lambda(x,y,z)+\mu(a,b,c)\in G\\ &\iff (\lambda x+\mu a,\lambda y+\mu b,\lambda z+\mu c)\in G\\ &\iff \begin{cases}(\lambda x+\mu a)+(\lambda y+\mu b)+(\lambda z+\mu c)=0\\ (\lambda y+\mu b)-(\lambda z+\mu c)=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\lambda\overbrace{(x+y+z)}^{=0}+\mu\overbrace{(a+b+c)}^{=0}\\ \lambda\underbrace{(y-z)}_{=0}+\mu\underbrace{(b-c)}_{=0}=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}0=0\\0=0\end{cases}\end{aligned}$$

— Soit $w\in E$. On pose $w=(x,y,z)$

$$\begin{aligned}w\in F+G &\iff \exists(u,v)\in F\times G, w=u+v\\ &\iff \exists x'\in\mathbb{R},\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\begin{cases}w=(x',0,x')+(a,b,c)\\ a+b+c=0\\ b-c=0\end{cases}\\ &\iff \exists\left(x',a,b,c\right)\in\mathbb{R}^4,\begin{cases}(x,y,z)=(a+x',b,c+x')\\ a+b+c=0\\ b-c=0\end{cases}\\ &\iff \exists\left(x',a,b,c\right)\in\mathbb{R}^4,(S'):\begin{cases}a+x'=x\\ b=y\\ c+x'=z\\ a+b+c=0\\ b-c=0\end{cases}\end{aligned}$$

(S') est un système linéaire à 4 inconnues (x',a,b,c), 5 équations, 3 paramètres (x,y,z)

$$(S')\iff\begin{cases}b=y\\ c=y\\ x'=z-y\\ a=x-z+y\\ x+3y-z=0\end{cases}$$

Si $x+3y-z\neq0$ alors (S') n'a pas de solutions et donc $w\notin F+G$

Si $x+3y-z=0$ alors (S') a une unique solution alors

$$\exists!(u,v)\in F\times G, w=u+v$$

On a montré que

$$F\oplus G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+3y-z=0\right\}$$

Proposition: Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E
F et G sont en somme directe si et seuelement si $F \cap G = \{0_E\}$

Preuve: " $\implies$ " On suppose la somme directe.
Soit $x \in F \cap G$.
D'une part, $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$
D'autre part, $0_E = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{(-x)}_{\in G}$
Par unicité, $x = 0_E$
" $\impliedby$ " On suppose $F \cap G = \{0_E\}$
Soit $x \in F + G$ et on supoise que x a deux décompositions :

$$\begin{cases} x = u + v, & u \in F, v \in G \\ x = u' + v', & u' \in F, v' \in G \end{cases}$$

D'où, $u - u' = v' - v$
Or, $\begin{cases} u - u' \in F \\ v - v' \in G \end{cases}$
Donc, $u - u' \in F \cap G = \{0_E\}$
donc $u - u' = 0_E$ donc $u = u'$ donc $v' = v$

$\square$

Remarque:
Ce résultat est inutile pour l'instant (en l'absence d'arguments dimensionnels) pour prouver un resultat de la forme $E = F \oplus G$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
$F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$
Prouvons que $E = F \oplus G$
Soit $f \in F \cap G$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) = -f(x)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

donc $f = 0_E$
Ainsi, la somme de F est G est directe

$$F + G = F \oplus G$$

Montrons que $E = F + G$. Soit $f \in E$.

<u>Analyse</u> Soient $g \in G$ et $g \in F$ telles que

$$f = g + h$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = -g(x) + h(x) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ \\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$$

Donc $F+G=F\oplus G$.

<u>SYNTHÈSE</u> On pose

$$\begin{cases} g : x \longmapsto & \frac{1}{2}(f(x)-f(-x)) \\ h : x \longmapsto & \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) \end{cases}$$

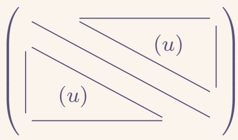
On vérifie que $\begin{cases} g \in F \\ h \in F \\ g+h=f \end{cases}$

On a prouvé que $E=F+G$

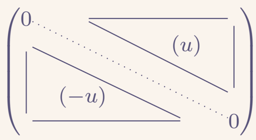
EXEMPLE:

$E=\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$

$F=S_2(\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$



$G=A_2(\mathbb{C})=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{C}\right\}$



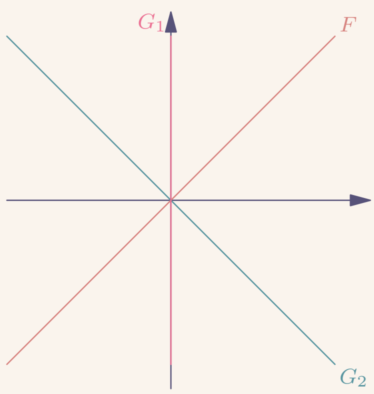
$E=F\oplus G$

> **Définition:** Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que F et G sont <u>supplémentaires</u> dans E si
>
> $$E=F\oplus G$$
>
> en d'autres termes,
>
> $$\forall x\in E, \exists!(y,z)\in F\times G, x=y+z$$

EXEMPLE:

$E=\mathbb{R}^2$

$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=x\}$



$G_1 \oplus F = E$ et $G_2 \oplus F = E$
Soit $(x, y) \in E$

$$\begin{aligned}(x,y) &= \underbrace{(x,x)}_{\in F} + \underbrace{(0, y-x)}_{\in G_1} \\ &= \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in G_2}\end{aligned}$$

Définition: Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall x \in \sum_{i\in I} F_i, \exists!(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i \text{ presque nulle telle que } x = \sum_{i\in I} x_i$$

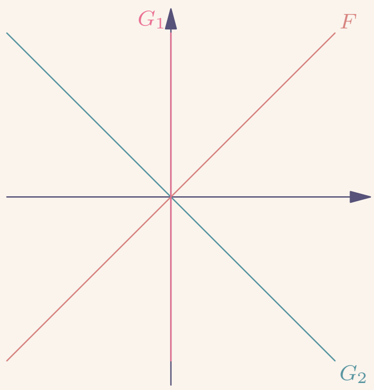
Dans ce cas, on écrit $\bigoplus_{i\in I} F_i$ à la place de $\sum_{i\in I} F_i$

Exemple:
E : l'espace des fonctions polynomiales

$$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{K}\}$$

$E = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} F_i$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} F = \{(x,x) \ \mid x \in \mathbb{R}\} \\ G = \{(0,x) \ \mid x \in \mathbb{R}\} \\ F = \{(x,-x) \ \mid x \in \mathbb{R}\}\end{cases}$$

On a $F \cap G \cap H = \{0_E\}$ mais leur somme n'est pas directe

$$\begin{aligned}(0,0) &= \overbrace{(1,1)}^{\in F} + \overbrace{(0,-2)}^{\in G} + \overbrace{(-1,1)}^{\in H} \\ &= \underbrace{(2,2)}_{\in F} + \underbrace{(0,-4)}_{\in G} + \underbrace{(-2,2)}_{\in H}\end{aligned}$$

Troisième partie

Familles de vecteurs

Définition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \in \mathscr{P}(E)$. Le sous-espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous espace vectoriel V de E tel que $A \subset V$.
On le note $\mathrm{Vect}(A)$

Exemple:
E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\mathrm{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$
- $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$
- $\mathrm{Vect}(E) = E$
- Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$
  $\mathrm{Vect}(\{u\}) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$
- Soient $u, v \in \exists \setminus \{0_E\}$
  $\mathrm{Vect}(\{u,v\}) = \left\{\lambda u + \mu v \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\right\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$

Définition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E \setminus \{0_E\}$. La droite (vectorielle) engendrée par u est $\mathbb{K}u = \mathrm{Vect}(u) = \mathrm{Vect}(\{u\})$. Soit $v \in E$. On dit que u et v sont colinéaires si $v \in \mathbb{K}u$. Si v n'est pas colinéaire à u alors, $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$ est appelé plan (vectoriel) engendré par u et v.

Exemple:
L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une droite vectorielle.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficiants constants est un plan vectoriel.

$$\left\{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \mid y'' + y = 0\right\} = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ un famille non vide de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I}\right) &= \left\{\sum_{i\in I} \lambda_i e_i \mid (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \text{ et } (\lambda_i) \text{ presque nulle}\right\} \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{K} e_i\end{aligned}$$

Preuve:
On pose $F = \sum_{i\in I} \mathbb{K}e_i$
F est un sous espace vectoriel de E.

$$\forall i \in I, e_i = \underbrace{\sum_{j\in I} \lambda_j e_j}_{\in F} \text{ où } \lambda_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$
$$= \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

Soit G un sous espace vectoriel de E tel que

$$\forall i \in I, e_i \in G$$

Soit $u \in F$. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que $u = \sum_{ii\in I} \lambda_i e_i$

Soit $\{i_1, \dots, i_k\} = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$
Donc,

$$u = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\lambda_{ij} e_{ij}}_{\in G} \in G$$

Donc $F \subset G$ □

Définition: On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si

$$E = \mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I}\right)$$

Exemple:

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} e_1 & = (1,0,1) \\ e_2 & = (0,1,1) \\ e_3 & = (1,1,1) \\ e_4 & = (1,0,0) \\ e_5 & = (0,1,2) \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$ tels que

$$(E): \quad (x,y,z) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i e_i$$

$$\begin{aligned} (E) &\iff (x,y,z) = (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_5) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \boxed{\lambda_4} = x \\ \lambda_2 + \boxed{\lambda_3} + \lambda_5 = y \\ \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_5 = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_4 = x - \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_3 = y - \lambda_2 - \lambda_5 \\ \lambda_1 = z - \lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_5 \end{cases} \end{aligned}$$

Par exemple, $(\lambda_1 = z - y, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = y, \lambda_4 = x - z, \lambda_5 = 0)$ est solution

Donc

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = E$$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,1,0) \\ e_2 = (0,1,0,1) \\ e_3 = (1,1,1,1) \\ e_4 = (1,-1,1,-1) \\ e_5 = (1,1,0,0) \end{cases}$$

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$

$$(E) \quad (x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i e_i \iff \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 \\ z = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ t = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \begin{cases} \lambda_5 = x - z \\ \lambda_5 = y - t \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = t \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_5 = x - z \\ \boxed{0 = y - t - x + z} \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = t \end{cases}$$

Par exemple ; $(1, 0, 0, 0) \notin \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E et $(u_j)_{j \in J}$ une surfamille de $(e_i)_{i \in I}$ constituée de vecteurs de E :

$$\forall i \in I, \exists j \in J, e_i = u_j$$

Alors, $(u_j)_{j \in J}$ engendre E. □

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E et $i_0 \in I$

$$\begin{aligned} (e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \text{ engendre } E &\iff e_{i_0} \in \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}\right) \\ &\iff e_{i_0} \text{ est une combinaison linéaire des } e_i \ (i \in I, i \neq i_0) \end{aligned}$$

Preuve: " $\implies$ " $E = \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i \neq i_0}\right)$ et $e_{i_0} \in E$

" $\impliedby$ " Soit $u \in E$. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Soit $(\mu_i)_{i \neq i_0}$ une famille de scalaires telle que

$$e_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i$$

D'où,

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} (\lambda_{i_0} \mu_i + \lambda_i) e_i \\ &\in \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}\right) \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, $i_0 \in I$.

1. On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ \lambda e_{i_0} & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$
   Alors, $(u_i)_{i\in I}$ engendre E
2. Soit $v \in \text{Vect}\left((e_i)_{i\in I\setminus\ \{i_0\}}\right)$.
   On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ e_{i_0} + v & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$
   Alors, $(u_i)_{i\in I}$ engendre E

Preuve: 1. Soit $u \in E$. On pose

$$u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

où $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} \lambda^{-1} u_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i u_i \\ &\in \text{Vect}\left((u_i)_{i\in I}\right) \end{aligned}$$

2. Soit $u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in E$

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}\lambda_i e_i} \\ &= \lambda_{i_0} (u_{i_0} - v) + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i u_i \end{aligned}$$

Or, $v = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i e_i = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i u_i$ où $(\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle
Donc, $u = \lambda_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} (\lambda_i - \lambda_{i_0}\mu_i) u_i \in \text{Vect}\left((u_i)_{i\in I}\right)$

□

Définition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est <u>libre</u> si aucun vecteur de cette famille n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille :

$$\forall i \in I, e_i \notin \text{Vect}\left((e_j)_{j\in I\setminus\{i\}}\right)$$

On dit aussi que les e_i sont <u>linéairement indépendants</u>

Proposition:

$(e_i)_{i\in I}$ est libre $\iff \forall(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle , $\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = O_{\mathbb{K}}\right)$

Preuve: " $\implies$ " Soit $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle. On suppose que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$$

On suppose aussi qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$
On a alors

$$\lambda_{i_0} e_{i_0} = -\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i e_i$$

$\lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc il a un inverse $\lambda_{i_0}^{-1}$ donc

$$e_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \left(-\lambda_i \lambda_{i_0}^{-1}\right) e_i \in \mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}\right)$$

une contradiction $\lightning$
" $\impliedby$ " On suppose que $(e_i)_{i\in I}$ n'est pas libre. On considère $i_0 \in I$ tel que e_{i_0} soit une combinaison linéaire des $e_i, i \in I \setminus \{i_0\}$

$$e_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i e_i$$

avec $(\mu_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ famille presque nulle de scalaires.
Alors, $1_{\mathbb{K}} e_{i_0} - \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i e_i = 0_E$ Par hypothèse

$$\begin{cases} 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \\ \forall i \neq i_0, -\mu_i = 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

une contradiction $\lightning$

□

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$ On pose $\begin{cases} e_1 = (1,1,0) \\ e_2 = (1,0,1) \end{cases}$
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E &\iff (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc, (e_1, e_2) est libre.

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, e_1 = \cos, e_2 = \sin$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0 \\ &\implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 & (x = 0) \\ \lambda_2 = 0 & (x = 0 \text{ dans la dérivée}) \end{cases}\end{aligned}$$

Donc (e_1, e_2) est libre.

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E. Alors

$$\sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} e_i$$

i.e.

$$\forall u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

En d'autres termes, tout vecteur de E a au plus une décomposition en combinaisons linéaires des $e_i, i \in I$

Preuve:
Soit $u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i$
On suppose que u a au plus 2 décompositions

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} \mu_i e_i$$

avec (λ_i) et (μ_i) presque nulles.
Alors,

$$0_E = u - u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i - \sum_{i \in I} \mu_i e_i = \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i$$

Or, $(e_i)_{i \in I}$ est libre donc

$$\forall i \in I, \lambda_i \mu_i = 0_{\mathbb{K}}$$

□

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E.

1. Toute sous famille de (e_i) est encore libre
2. Soit $u \in E$, $\mathscr{F} = (e_i \mid i \in I) \cup \{u\}$.

$$\mathscr{F} \text{ est libre} \iff u \notin \operatorname{Vect}(e_i \mid i \in I)$$

3. (a) Quand on remplace un vecteur e_i par λe_i avec $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, la famille obtenue est libre.
   (b) Quand on remplace un vecteur e_i par $v + e_i$ avec $v \in \operatorname{Vect}(e_j \mid j \neq i)$, la famille obtenue est libre.

Définition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que (e_i) est une base de E si c'est à la fois une famille libre et génératrice de E ; i.e. si

$$E = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} e_i$$

i.e. si

$$\forall u \in E, \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Dans ce cas, on dit que les λ_i sont les coordonnées de u dans la base $(e_i)_{i\in I}$

Exemple: 1. $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2. (1) est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel

3.
$$\begin{cases} u = 1+i \\ v = 1-i \end{cases}$$
(u, v) est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$
En effet, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z = \lambda u + \mu v &\iff a + ib = \lambda + \mu + i(\lambda - \mu) \\ &\iff \begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda - \mu \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{a+b}{2} \\ \mu = \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Autre méthode

$$\begin{aligned} &(1, i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1, 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1-(1+i), 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(-2i, 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1+i-2i, 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1-i, 1+i) \text{ base} \end{aligned}$$

Exemple (Bases canoniques): 1. La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $(e_1, \ldots, e_n)$ où $\forall i, e_i = (0_\mathbb{K}, \ldots, 0_\mathbb{K}, \underbrace{1_\mathbb{K}}_{\text{en } i\text{ème} position}, 0_\mathbb{K}, \ldots, 0_\mathbb{K})$ car

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{K}^n, \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, u = (x_1, \ldots, x_n) &= x_1(1_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, \ldots, 0_\mathbb{K}) \\ &+ x_2(0_\mathbb{K}, 1_\mathbb{K}, \ldots, 0_\mathbb{K}) \\ &\vdots \qquad \vdots \\ &+ x_n(0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, \ldots, 1_\mathbb{K}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{aligned}$$

2. E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ à coefficiants dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est infini.
La base canonique de E est $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ car

$$\forall P \in E, \exists! n \in \mathbb{N}, \exists!(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

3. $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
La base canonique de E est $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], E_{i,j} = \left(\sigma_{i,j}^{k,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant \ell\leqslant p}}$$

i.e.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \\ & \downarrow & \end{array} \\ E_{i,j} = & \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & \cdots\cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & 1_{\mathbb{K}} & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & \cdots\cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \leftarrow i \end{array}$$

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}, A = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} E_{i,j}$$