Chapitre 9

Inégalité $\mathbb{R}$

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Deuxième partie

Troisième partie

Quatrième partie

Bornes supérieures

Proposition (borne inférieure)**:** Toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

■

Proposition (caractérisation de la borne supérieure)**:** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, A_0 > M - \varepsilon. \end{cases}$$

■

Proposition (caractérisation de la borne inférieure)**:** Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide minorée et $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ m \leqslant a; \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a_0 \in A,\ a_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$$

□

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.

$$M \geqslant \sup(A) \iff \forall a \in A, a \leqslant M.$$

■

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée et $m \in \mathbb{R}$.

$$m \leqslant \inf(A) \iff \forall a \in A, m \leqslant a.$$

□

Proposition – Définition: $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, nx \geqslant y.$$

■

Théorème: Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b \in \mathbb{R}$) est continue, alors

$$\exists(\alpha, \beta) \in [a, b]^2,\ \forall x \in [a, b],\ f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

■

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée. Il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup(A)$.

■

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée. Il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \inf(A)$. $\square$

Cinquième partie

Partie entière

Proposition − Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

Cet entier n est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

Sixième partie

Densité

Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si, pour tout intervalle I ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $A \cap I \neq \varnothing$.

Théorème: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

■

Théorème: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Il manque une partie du cours ici

Septième partie

Huitième partie

Il manque une partie du cours ici ■

Il manque une partie du cours ici