Chapitre 5

Calcul intégral

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Généralités

Définition: Soient I un <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$, f une fonction continue et $a, b \in I$.

On définit <u>l'intégrale de f</u> de a à b par

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f.

La variable x est <u>muette</u> :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\ \mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(\text{❀})\ \mathrm{d}\text{❀} \neq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}t$$

Proposition (Croissance)**:** Soient f et g continues sur I, $a, b \in I^2$ tels que $\begin{cases} \forall x \in I, f(x) \leqslant g(x), \\ a \leqslant b. \end{cases}$

Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Preuve:
On pose, pour tout $x \in I$, $h(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$. h est continue sur I.

Soit H une primitive de h sur I. Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x \\ &= H(a) - H(b) \end{aligned}$$

Or, $h = H' \geqslant 0$ donc H est croissante sur I. Comme $b \geqslant a$, $H(b) \geqslant H(a)$ et donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 0.$ □

Proposition (Linéarité)**:** Soient f et g continues sur I, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\int_a^b \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Preuve:
Soient F et G deux primitives sur I de f et g respectivement.

$\alpha F + \beta G$ est un primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I car

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta(g)\big)\ \mathrm{d}x &= (\alpha F + \beta G)(b) - (\alpha F + \beta G)(a) \\ &= \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(b) - \beta G(a) \\ &= \alpha\big(F(b) - F(a)\big) + \beta\big(G(b) - G(a)\big) \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Proposition (Chasles)**:** Soit f continue sur un interval I, $a, b, c \in I$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Preuve:
Soit F une primitive de f sur I. Alors,

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c\ \mathrm{d}x &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit f positive et continue sur un interval I, $(a, b) \in I^2$ avec $a \leqslant b$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0 \iff \forall x \in [a, b], f(x) = 0.$$

Preuve:
Soit F une primitive de f.

“ $\implies$ ” On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Donc $F(b) = F(a)$.

Comme $F' = f \geqslant 0$, F est croissante.

□