Bisimulation.

L'idée de ce chapitre est d'identifier les systèmes de transitions avec une « même structure de branchement ». Par exemple, on identifie les deux systèmes suivants (le premier est un « dépliement » du second).

$$
\begin{array}{ll}
TS_1 & \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots \\
TS_2 & \longrightarrow \underset{\circlearrowleft}{\bullet}
\end{array}
$$

Fig. 1 | *Deux systèmes de transitions identifiés par bisimulation*

Définition 1. Soient TS_0 et TS_1 où

$$TS_i = (S_i, \mathrm{Act}, \to_i, I_i, \mathrm{AP}, L_i),$$

où l'on note $s_i \xrightarrow{\alpha} s_i'$ où $\alpha \in \mathrm{Act}$ et $s_i, s_i' \in S_i$, et $L_i : S_i \to \wp(\mathrm{AP})$.

Une *bisimulation* entre TS_0 et TS_1 est une relation $\mathscr{R} \subseteq S_0 \times S_1$ telle que

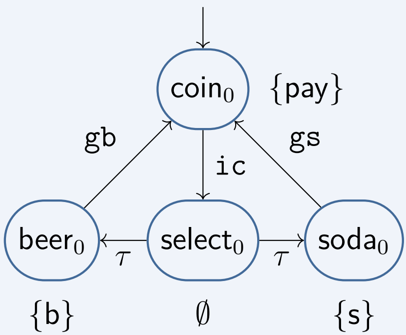
1. si $s_0 \mathrel{\mathscr{R}} s_1$ alors $L_0(s_0) = L_1(s_1)$;
2. si $s_0 \mathrel{\mathscr{R}} s_1$ et $s_0 \xrightarrow{\alpha} s_0'$, alors il existe $s_1' \in S_1$ tel que $s_1 \xrightarrow{\alpha} s_1'$ et $s_0' \mathrel{\mathscr{R}} s_1'$.
3. de même symétriquement.

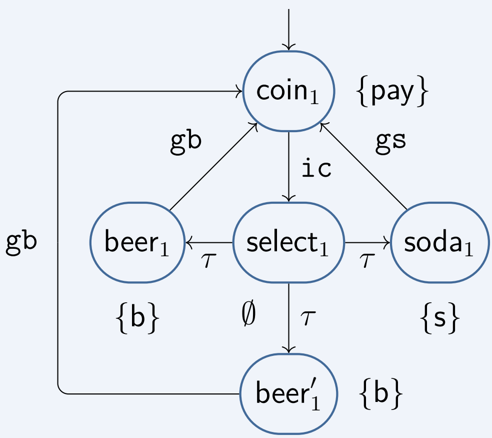
Ces deux dernières conditions peuvent être visualisées comme les deux diagrammes ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, dash, "\mathscr{R}"] \arrow[d, "\alpha"] & s_1 \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ s_0' \arrow[r, dash, dashed, "\mathscr{R}"] & s_1' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, dash, "\mathscr{R}"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & s_1 \arrow[d, "\alpha"] \\ s_0' \arrow[r, dash, dashed, "\mathscr{R}"] & s_1' \end{tikzcd}.$$

Exemple 1. Avec les deux systèmes de transitions suivants, on peut construire une bisimulation $\mathscr{R}$ avec

$$\mathscr{R} = \left\{ \begin{array}{l} (\mathsf{coin}_0, \mathsf{coin}_1), (\mathsf{select}_0, \mathsf{select}_1), (\mathsf{beer}_0, \mathsf{beer}_1), \\ (\mathsf{beer}_0, \mathsf{beer}_1'), (\mathsf{soda}_0, \mathsf{soda}_1) \end{array} \right\}.$$





Définition 2. Soient TS_0 et TS_1 deux systèmes de transitions. La relation de *bisimilarité* entre TS_0 et TS_1 est donnée par

$$s_0 \sim s_1 \iff \exists \mathscr{R} \text{ une bisimulation, } s_0 \mathrel{\mathscr{R}} s_1.$$

On dit alors que s_0 est *bisimilaire* à s_1.

Lemme 1.
1. Étant donné TS, on a que s est bisimilaire à s (car $\{(s,s) \mid s \in S\}$ est une bisimulation entre TS et lui-même).
2. Si $\mathscr{R}$ est une bisimulation entre TS_1 et TS_2, alors
$$\mathscr{R}^{-1} := \{(s_2, s_1) \mid (s_1, s_2) \in \mathscr{R}\}$$
est une bisimulation entre TS_2 et TS_1.
3. Si $\mathscr{R}$ est une bisimulation entre TS_1 et TS_2, et $\mathscr{S}$ est une bisimulation entre TS_2 et TS_3, alors
$$\mathscr{S} \circ \mathscr{R} := \left\{ (s_1, s_3) \;\middle|\; \exists s_2, \begin{array}{l} (s_1, s_2) \in \mathscr{R} \\ (s_2, s_3) \in \mathscr{S} \end{array} \right\}$$
est une bisimulation entre TS_1 et TS_3.

□

Lemme 2.
1. La relation de bisimilarité $\sim$ entre TS_1 et TS_2 est une bisimulation.
2. Si $\mathscr{R}$ est une bisimulation entre TS_1 et TS_2 alors $\mathscr{R} \subseteq \sim$.
3. La relation $\sim$ entre TS et lui-même est une relation d'équivalence.

Preuve. (Idée)

1. Soient $s_1 \sim s_2$, et soit donc $\mathscr{R}$ telle que $s_1 \mathrel{\mathscr{R}} s_2$. Donc,

- $L_1(s_1) = L_2(s_2)$;
- comme $s_1' \mathscr{R} s_2'$, on a $s_1' \sim s_2'$ où

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, dash, "\mathscr{R}"] \arrow[d, "\alpha"] & s_1 \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ s_0' \arrow[r, dash, dashed, "\mathscr{R}"] & s_1' \end{tikzcd} ;$$

- et symétriquement pour le cas dual.

2. Si $s_1 \mathscr{R} s_2$ alors $s_1 \sim s_2$ par définition de $\sim$.
3. On a les points suivants.

Réflexivité. On a $s \sim s$.

Symétrie. Si $s \sim s'$ alors $s \mathscr{R} s'$ pour une certaine bisimulation $\mathscr{R}$, et donc $s' \mathscr{R}^{-1} s$ et donc $s' \sim s$.

Transitivité. Si $s \sim s'$ et $s' \sim s''$ alors $s \mathscr{R} s'$ et $s' \mathscr{S} s''$, et donc $s \ (\mathscr{S} \circ \mathscr{R}) \ s''$ d'où $s \sim s''$.

$\square$

1 Quotient par bisimulation.

Définition 3 (Quotient par bisimulation.). Soit un système de transitions $TS = (S, \mathrm{Act}, \to, I, \mathrm{AP}, L)$. On définit $TS_\sim$ par :

- $S_\sim := \{[s]_\sim \mid s \in S\}$;
- $\mathrm{Act}_\sim := \mathrm{Act}$;
- $[s]_\sim \xrightarrow{\alpha} [s']_\sim$ ssi $s \xrightarrow{\alpha} s'$;
- $I_\sim = \{[s]_\sim \mid s \in I\}$;
- $\mathrm{AP}_\sim := \mathrm{AP}$;
- $L_\sim([s]_\sim) = L(s)$.

Lemme 3. Pour tout $s \in I$ et $s \sim [s]_\sim$.

Définition 4. Soient $TS_1 = (S_1, \mathrm{Act}, \to_1, I_1, \mathrm{AP}, L_1)$ et $TS_2 = (S_2, \mathrm{Act}, \to_2, I_2, \mathrm{AP}, L_2)$ deux systèmes de transitions.

On note $TS_1 \approx TS_2$ s'il existe une bisimulation $\mathscr{R}$ entre TS_1 et TS_2 telle que

1. pour tout $s_1 \in I_1$, il existe $s_2 \in I_2$ tel que $s_1 \mathrel{\mathscr{R}} s_2$;
2. pour tout $s_2 \in I_2$, il existe $s_1 \in I_1$ tel que $s_1 \mathrel{\mathscr{R}} s_2$.

2 Bisimilarité et équivalence de traces.

Proposition 1. Soient TS_1, TS_2 sur un même ensemble d'actions Act et de propositions atomiques AP. Si $TS_1 \approx TS_2$ alors

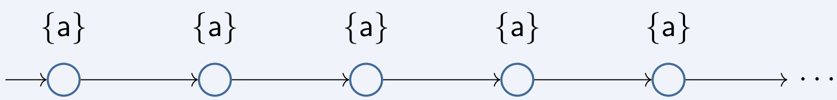
$$\mathrm{Tr}^\omega(TS_1) = \mathrm{Tr}^\omega(TS_2).$$

Corollaire 1. Si $TS_1 \approx TS_2$ alors, pour toute propriété LT $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$, on a

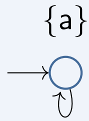
$$TS_1 \models P \iff TS_2 \models P.$$

Exemple 2. Pour un système de transitions TS, on a $TS \approx TS_\sim$, on peut donc se ramener au quotient par bisimilarité, pour tester si $TS \models P$.

Exemple 3. Le quotient par bisimilarité du système de transitions



est le système de transitions



car tous les états sont bisimilaires dans le système de transitions original.