Logique temporelle linéaire.

1 La logique LML.

Remarque 1 (Idée). La signification de LML est *linear-time modal logic*. L'idée est de définir une logique pour une propriété LT $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ telle que, pour AP fini, les formules correspondent aux clopens.

Soit AP un ensemble de proposition atomiques.

Définition 1. Les formules de LML sont

$$
\begin{aligned}
\phi, \psi ::= \; & \mathsf{a} && \mathsf{a} \in \mathrm{AP} \\
\mid \; & \mathsf{True} && \text{(parfois notée } \top) \\
\mid \; & \mathsf{False} && \text{(parfois notée } \bot) \\
\mid \; & \phi \wedge \psi \\
\mid \; & \phi \vee \psi \\
\mid \; & \neg \phi \\
\mid \; & \bigcirc \phi \\
& .
\end{aligned}
$$

La *modalité* $\bigcirc$ est appelée *later* ou *next*.

Définition 2. L'*interprétation* $[\![\phi]\!] \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ est définie par :

- ▷ $[\![\mathsf{a}]\!] := \{\sigma \mid \mathsf{a} \in \sigma(0)\}$;

- ▷ $[\![\mathsf{True}]\!] := (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$;
- ▷ $[\![\phi \land \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$;
- ▷ $[\![\mathsf{False}]\!] := \emptyset$;
- ▷ $[\![\phi \lor \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$;
- ▷ $[\![\neg \phi]\!] := (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus [\![\phi]\!]$;
- ▷ $[\![\bigcirc \phi]\!] := \{\sigma \mid \sigma \restriction 1 \in [\![\phi]\!]\}$ où, pour $\sigma \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$, on note

$$\begin{aligned}\sigma \restriction i : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbf{2}^{\mathrm{AP}}\\ k &\longmapsto \sigma \restriction \sigma(k+i),\end{aligned}$$

(c'est un décalage d'indices).

Exemple 1. Quelques exemples de mots tels que $\sigma \in [\![\mathsf{a} \lor \bigcirc \mathsf{b}]\!]$:

- ▷ $\sigma = \{\mathsf{a}\}\emptyset^\omega$,
- ▷ $\sigma = \{\mathsf{b}\}\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^\omega$,
- ▷ $\sigma = \emptyset\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}\emptyset^\omega$.

Proposition 1. Pour ϕ une formule de LML, on a que $[\![\phi]\!]$ est clopen dans $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$.

Preuve. Par induction sur ϕ, on a les cas suivants.

- ▷ On a que $[\![\mathsf{a}]\!] = \bigcup_{\mathsf{a} \in A \subseteq \mathrm{AP}} \mathsf{ext}(A)$[1] est un ouvert. De plus, on a que $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus [\![\mathsf{a}]\!] = \bigcup_{a \notin B \subseteq \mathrm{AP}} \mathsf{ext}(B)$ est un ouvert.
- ▷ On a que
  - – $[\![\bigcirc \phi]\!] = \bigcup_{u \in W, A \subseteq \mathrm{AP}} \mathsf{ext}(Au)$
  - – $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus [\![\bigcirc \phi]\!] = \bigcup_{v \in V, A \subseteq \mathrm{AP}} \mathsf{ext}(Av)$

  où par hypothèse d'induction, il existe $V, W \subseteq \Sigma^\star$ tels que $[\![\phi]\!] = \mathsf{ext}(W)$ et $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus [\![\phi]\!] = \mathsf{ext}(V)$.

▷ De même pour les autres cas.

□

Proposition 2. Si AP est ***fini*** et $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ est clopen alors il existe ϕ une formule LML telle que $P = [\![\phi]\!]$.

Preuve. On a que $P = \mathsf{ext}(W)$ où $W \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\star$ est ***fini***. On a montrer par récurrence sur la taille du mot u que :

$$\forall u \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\star, \quad \exists \phi_u \text{ une formule LML}, \quad [\![\phi_u]\!] = \mathsf{ext}(u).$$

▷ *Cas de base.* Soit $A \subseteq \mathrm{AP}$, on peut prendre

$$\phi_A := \Big(\bigwedge_{\mathsf{a} \in A} \mathsf{a}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\mathsf{b} \notin A} \neg \mathsf{b}\Big).$$

▷ *Récurrence.* Soit $u = Av$ où $A \subseteq \mathrm{AP}$ et $v \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\star$. On peut poser

$$\phi_{Av} := \phi_A \wedge \bigcirc \phi_v.$$

On peut aussi faire le cas de base pour ε, en posant $\phi_\varepsilon := \mathsf{True}$.

□

Corollaire 1. Si AP est ***fini*** et $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ alors

$$P \text{ clopen} \iff \text{il existe } \phi \text{ telle que } [\![\phi]\!] = P.$$

□

1.1 Équivalences logiques.

Définition 3. On note $\phi \equiv \psi$ lorsque $[\![\phi]\!] = [\![\psi]\!]$. On dit que ϕ et ψ sont *(logiquement) équivalentes.*

[1] On rappelle que $\mathsf{ext}(A) = \{\sigma \mid \sigma(0) = A \subseteq \mathrm{AP}\}$.

On a les équivalences suivantes :

- $\phi \equiv \phi \wedge \phi$
- $\phi \equiv \mathsf{True} \wedge \phi$
- $\mathsf{True} \equiv \phi \vee \neg\phi$
- $\mathsf{False} \equiv \phi \wedge \neg\phi$
- $\phi \equiv \neg\neg\phi$
- $\bigcirc(\phi \vee \psi) \equiv \bigcirc\phi \vee \bigcirc\psi$
- $\bigcirc\mathsf{False} \equiv \mathsf{False}$
- $\bigcirc(\phi \wedge \psi) \equiv \bigcirc\phi \wedge \bigcirc\psi$
- $\bigcirc\mathsf{True} \equiv \mathsf{True}$

d'autres équivalences sont possibles (*c.f.* figure 6 des notes de cours).

1.2 *Homework* : Dualité de Stone.

L'idée est de motiver le DM, et de donner quelques bases sur ce que l'on va montrer.

On se place dans le cas où AP est un ensemble fini. Considérons un mot $\sigma \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$, on pose

$$\mathscr{F}_\sigma := \{[\phi]_\equiv \mid \sigma \in [\![\phi]\!]\},$$

où $[\phi]_\equiv$ est la classe d'équivalence de $\equiv$. Par les résultats précédents, on a que

$$\mathscr{F}_\sigma \cong \{C \mid \sigma \in C \text{ clopen}\}.$$

On a $\sigma \neq \beta$ implique $\mathscr{F}_\sigma \neq \mathscr{F}_\beta$. De plus, on a les propriétés suivantes :

1. si $C \in \mathscr{F}_\sigma$ et $C \subseteq D$ clopen alors $D \in \mathscr{F}_\sigma$;
2. si $C, D \in \mathscr{F}_\sigma$ alors $C \cap D \in \mathscr{F}_\sigma$;
3. $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \in \mathscr{F}_\sigma$;

4. si C, D sont clopen tels que $C \cup D \in \mathscr{F}_\sigma$ alors $C \in \mathscr{F}_\sigma$ ou $D \in \mathscr{F}_\sigma$;
5. $\emptyset \in \mathscr{F}_\sigma$.

Ces cinq propriétés caractérisent totalement les mots infinis, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1. Si $\mathscr{F}$ est un ensemble de clopens dans $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ vérifiant les cinq propriétés, alors il existe $\sigma \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ tel que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\sigma$.

Ce théorème est une spécialisation de la *dualité de Stone*.

Définition 4. On dit que $(X, \Omega X)$ est un *espace de Stone* s'il est compact, Hausdorff et qu'il admet une base de clopens.

Théorème 2. Si $(X, \Omega X)$ est un espace de Stone alors

$$(X, \Omega X) \cong \mathbf{Sp}\big(\underbrace{\{C \mid C \text{ clopen}\}, \subseteq}_{\text{algèbre de Boole}}\big).$$

On va définir le *spectre* $\mathbf{Sp}(B)$ où B est une algèbre de Boole, à l'aide des ultrafiltres sur B et les filtres premiers (*c.f.* les cinq propriétés ci-dessus).

Remarque 2 (Idée). Si $\mathscr{F} \subseteq B$ alors c'est une « théorie consistante et complète » où

- ▷ *théorie* : stable par implication, *c.f.* 1.–3.
- ▷ *consistante* : sans contradiction, 5.
- ▷ *complète* : 4., $\forall C$ clopen, si $C \notin \mathscr{F}_\sigma$ alors $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus C \in \mathscr{F}_\sigma$.

1.3 Extension de LML avec $\Box$ et $\Diamond$.

Remarque 3. Avec LML, on ne définit que des clopens. Ainsi, les propriétés de sécurité ne sont que « finitaires » et il n'y a que $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ comme propriété de vivacité.

Définition 5. On ajoute à LML les modalités

- $\Box\,\phi$ qui signifie « always » (notée parfois $\mathrm{A}\phi$) ;
- $\Diamond\,\phi$ qui signifie « eventually » (notée parfois $\mathrm{E}\phi$) ;

où

- $[\![\Box\,\phi]\!] := \left\{\, \sigma \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}, \sigma \restriction n \in [\![\phi]\!] \,\right\}$;
- $[\![\Diamond\,\phi]\!] := \{\, \sigma \mid \exists n \in \mathbb{N}, \sigma \restriction n \in [\![\phi]\!] \,\}$.

Dans la suite, les preuves se termineront par « **QED** » au lieu du symbole usuel « □ », pour enlever l'ambigüité avec la modalité.

Notation. On note $\sigma \Vdash \phi$ pour $\sigma \in [\![\phi]\!]$.

Exemple 2. On a

1. $\sigma \Vdash \Diamond\,\mathsf{a}$ ssi $\exists n \in \mathbb{N}, \mathsf{a} \in \sigma(n)$, l'ensemble $[\![\Diamond\, a]\!]$ est ouvert mais pas compact, donc pas un clopen car
$$[\![\Diamond\,\mathsf{a}]\!] = \bigcup_{u \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\star, \mathsf{a} \in A} \mathsf{ext}(uA);$$
2. $\sigma \Vdash \Box\,\mathsf{a}$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \mathsf{a} \in \sigma(n)$ (l'ensemble $[\![\Box\,\mathsf{a}]\!]$ est un fermé non clopen) ;
3. $\sigma \Vdash \Box\,\Diamond\,\mathsf{a}$ ssi $\exists^\infty n, \mathsf{a} \in \sigma(n)$ (c'est une propriété de vivacité) ;
4. $\sigma \Vdash \Diamond\,\Box\,\mathsf{a}$ ssi $\forall^\infty n, \mathsf{a} \in \sigma(n)$ (c'est une propriété de vivacité).

Lemme 1. On a que :

1. $\Box\,\phi \equiv \neg \Diamond\, \neg\phi$;
2. $\Diamond\,\phi \equiv \neg \Box\, \neg\phi$;
3. $\Box\,\phi \equiv \phi \land \bigcirc \Box\,\phi$;
4. $\Diamond\,\phi \equiv \phi \lor \bigcirc \Diamond\,\phi$.

Avec des $\land$ et des $\lor$ infinis, on aurait :

$$\Box\,\phi \equiv \phi \land \bigcirc\,\phi \land \bigcirc\bigcirc\,\phi \land \cdots \equiv \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigcirc^n \phi$$

et

$$\Diamond\,\phi \equiv \phi \lor \bigcirc\,\phi \lor \bigcirc\bigcirc\,\phi \lor \cdots \equiv \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigcirc^n \phi.$$

Définition 6. On étend ensuite LML par variables :

$$\phi, \psi ::= X \mid \cdots ,$$

où $X, Y, \ldots \in \mathfrak{X}$. Une *valuation* de $\mathfrak{X}$ est une fonction

$$\rho : \mathfrak{X} \to \wp\big((\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega\big),$$

où la sémantique $[\![\phi]\!]_\rho$ est définie de manière très similaire à $[\![\phi]\!]$ en ajoutant

$$[\![X]\!]_\rho := \rho(X).$$

Notation. Soient ϕ, ρ, X, on pose

$$\begin{aligned} [\![\phi]\!]_\rho(X) : \wp\big((\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega\big) &\longrightarrow \wp\big((\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega\big) \\ A &\longmapsto [\![\phi]\!]_{\rho[A/X]}, \end{aligned}$$

où $\rho[A/X](X) = A$ et $\rho[A/X](Y) = \rho(Y)$ si $Y \neq X$.

Lemme 2. Soit ϕ et X n'apparaissant pas dans ϕ. On pose

$$\phi_{\Diamond}(X) := \phi \wedge \bigcirc X \qquad \phi_{\Box}(X) := \phi \wedge \bigcirc X.$$

Alors, pour tout ρ,

- $[\![\Diamond\, \phi]\!]_\rho$ est le plus petit point fixe de $[\![\phi_{\Diamond}]\!]_\rho(X)$;
- $[\![\Box\, \phi]\!]_\rho$ est le plus grand point fixe de $[\![\phi_{\Box}]\!]_\rho(X)$.

Preuve. Pour le premier point, on doit montrer les deux propriétés suivantes :

1. $[\![\Diamond\, \phi]\!]_\rho = [\![\phi_{\Diamond}]\!]([\![\Diamond\, \phi]\!])$;
2. $\forall P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega,\ P = [\![\phi_{\Diamond}]\!]_\rho(P) \implies [\![\Diamond\, \phi]\!]_\rho \subseteq P$.

Pour la première propriété, c'est la loi d'expansion de $\Diamond$. Pour la seconde, soit P tel que $P = [\![\phi \vee \bigcirc X]\!](P)$ et $\sigma \in [\![\Diamond\, \phi]\!]$, et montrons que $\sigma \in P$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma \restriction n \in [\![\phi]\!]$. Alors, on a que $\sigma \restriction n \in [\![\phi \vee \bigcirc X]\!](P)$ et donc $\sigma \restriction n \in P$. Donc $\sigma \restriction (n-1) \in [\![\phi \vee \bigcirc \phi]\!](P) = P$, donc pour tout $i \le n$, $\sigma \restriction i \in [\![\phi \vee \bigcirc X]\!](P) = P$ et en particulier $\sigma = \sigma \restriction 0 \in P$. **QED**

Définition 7. On dit qu'une variable X est *positive* dans ϕ si toutes les occurrences de X dans ϕ sont sous un nombre pair de $\neg$. (On peut donner une définition inductive de « X est positive dans ϕ » et de « ϕ est négative dans ϕ ».)

Exemple 3. Dans les exemples ci-dessous, on a que X est positive dans ϕ :

$$\mathsf{a} \wedge \bigcirc X \qquad \mathsf{a} \vee \bigcirc X \qquad \text{et } \neg(\neg \mathsf{a} \wedge \bigcirc \neg X),$$

mais, dans les exemples ci-dessous, X n'est pas positive dans ϕ :

$$\neg X \qquad \text{et} \qquad \neg X \vee (\mathsf{a} \wedge \bigcirc X).$$

Lemme 3. Si X est positive dans ϕ alors

$$[\![\phi]\!](X) : \big(\wp((\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega), \subseteq\big) \longrightarrow \big(\wp((\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega), \subseteq\big)$$

est monotone. **QED**

1.4 Théorème de Knaster-Tarski.

Définition 8. Soient $(L, \leq)$ un poset et $f : L \to L$.

1. On dit que $a \in L$ est un *pré-pointfixe* de f si $f(a) \leq a$.
2. On dit que $a \in L$ est un *post-pointfixe* de f si $a \leq f(a)$.

Théorème 3 (Knaster-Tarski). Soit $f : L \to L$ une fonction monotone où $(L, \leq)$ est un treillis complet. Alors

$$\mu(f) := \bigwedge\{\, a \in L \mid f(a) \leq a \,\}$$

est le plus petit point fixe de f, et

$$\nu(f) := \bigvee\{\, a \in L \mid a \leq f(a) \,\}$$

est le plus grand point fixe de f.

Preuve. Vu en TD. **QED**

Lemme 4. Soit $f : (\wp(X), \subseteq) \to (\wp(X), \subseteq)$ monotone. On pose

$$\begin{aligned} g : \wp(X) &\longrightarrow \wp(X) \\ A &\longmapsto g(A) = X \setminus f(X \setminus A). \end{aligned}$$

On a alors que

$$\mu(f) = X \setminus \nu(g) \qquad \nu(f) = X \setminus \mu(g).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} X \setminus \nu(g) &= X \setminus \bigcup \{\, A \mid A \subseteq g(a) \,\} \\ &= \bigcap \{\, X \setminus A \mid A \subseteq g(A) \,\} \\ &= \bigcap \{\, X \setminus A \mid A \subseteq X \setminus f(X \setminus A) \,\} \\ &= \bigcap \{\, X \setminus A \mid f(X \setminus A) \subseteq X \setminus A \,\} \\ &= \bigcap \{\, B \mid f(B) \subseteq B \,\} \\ &= \nu(f). \end{aligned}$$

QED

2 La logique LTL.

La logique LTL est une extension de LML par certains points fixes. Soit $\theta(X)$ avec X positive dans θ. On peut écrire

$$\theta(X) \equiv \psi \vee \Big(\bigwedge_{i \in I} \Big(\phi_i \wedge \bigwedge_{j \in J_i} \bigcirc^{n_{i,j}} X \Big) \Big),$$

où X n'apparait pas dans ψ ni dans ϕ_i pour tout $i \in I$.

Dans LTL, on va avoir les points fixes de θ si $n_{i,j} = 1$. Dans ce cas, on pourra écrire

$$\theta(X) \equiv \psi \vee (\phi \wedge \bigcirc X),$$

où X n'apparait pas dans ψ ni dans ϕ.

Définition 9. On définit la syntaxe de LTL par

$$\begin{aligned}\phi, \psi ::= {} & \mathsf{a} & \mathsf{a} \in \mathrm{AP}\\ & \mid \phi \wedge \psi \\ & \mid \phi \vee \psi \\ & \mid \mathsf{False} \\ & \mid \mathsf{True} \\ & \mid \neg\phi \\ & \mid \bigcirc \phi \\ & \mid \phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi \\ & .\end{aligned}$$

La modalité $\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi$ est notée $\phi \mathbin{\mathsf{U}} \psi$ dans les notes de cours.

La sémantique pour LTL est définie de manière identique à la sémantique de LML en ajoutant

$$[\![\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi]\!] = \left\{ \sigma \in (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \;\middle|\; \exists i \in \mathbb{N}, \begin{array}{r} \sigma \upharpoonright i \in [\![\psi]\!] \\ \forall j < i, \sigma \upharpoonright j \in [\![\phi]\!] \end{array} \right\}.$$

2.1 Points fixes dans LTL.

On étend, dans cette sous-section uniquement, LTL avec des variables (comme pour LML).

Lemme 5. Soit X n'apparaissant pas dans ϕ ni ψ. Alors, on a que $[\![\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi]\!]$ est le plus petit point fixe de $[\![\theta]\!](X)$.

Preuve. On a

$$\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi \equiv \psi \vee (\phi \wedge \bigcirc (\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi)).$$

Soit P tel que $P = [\![\theta]\!](P)$. Soit $\sigma \in [\![\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi]\!]$. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma \upharpoonright i \in [\![\psi]\!]$ et $\sigma \upharpoonright 0, \ldots, \sigma \upharpoonright (i-1) \in [\![\phi]\!]$. On a $\sigma \upharpoonright i \in [\![\theta]\!](P) = P$, et comme $\sigma \upharpoonright (i-1) \in [\![\phi]\!]$, on a que $\sigma \upharpoonright (i-1) \in [\![\theta]\!](P) = P$.

Ainsi, pour tout $k \in \{i-1, \dots, 0\}$, on a $\sigma \upharpoonright k \in [\![\theta]\!](P) = P$, donc $\sigma = \sigma \upharpoonright 0 \in P$. **QED**

Remarque 4. Si X est (positive et) sous exactement un $\bigcirc$ dans $\theta(X)$ alors c'est le cas aussi dans $\neg\theta[\neg X/X]$.

On a

$$\begin{aligned} \neg\theta[\neg X/X] &= \neg\big(\phi \vee (\psi \wedge \bigcirc(\neg X))\big) \\ &\equiv \neg\psi \wedge (\neg\phi \vee \bigcirc X) \\ &\equiv (\neg\psi \wedge \neg\phi) \vee (\neg\psi \wedge \bigcirc X) \end{aligned},$$

donc

$$\mu[\![\neg\theta[\neg X/X]]\!](X) = [\![\neg\psi \mathsf{\ Until\ } (\neg\psi \wedge \neg\phi]\!].$$

Lemme 6. Soit X n'apparaissant pas dans ϕ, ψ. Alors

$$[\![\neg(\neg\psi \mathsf{\ Until\ } (\neg\psi \wedge \neg\phi))]\!]$$

qui est un plus petit point fixe de $[\![\theta]\!](X)$ pour $\theta(X) = \psi \vee (\phi \wedge \bigcirc X)$.

Notation. On note

$$\phi \mathsf{\ WUntil\ } \psi := \neg(\neg\psi \mathsf{\ Until\ } (\neg\psi \wedge \neg\phi)),$$

pour *weak until*.

Notation. On note

$$\Diamond\, \phi := \mathsf{True\ Until\ } \phi \qquad \Box\, \phi := \phi \mathsf{\ WUntil\ False},$$

et ont la même sémantique que pour LML.

Remarque 5. On peut montrer que le plus grand point fixe de $\theta(X) = \mathsf{a} \wedge \bigcirc \bigcirc X$ n'est pas définissable dans LTL.

2.2 Équivalences logiques pour LTL.

On note, comme avant, $\phi \equiv \psi$ si $[\![\phi]\!] = [\![\psi]\!]$. On a des lois, comme pour LML, *c.f.* figure 8 dans les notes de cours (section 7.3.3).

Exemple 4. On a

$$\begin{gathered}
\Diamond\, \mathsf{False} \equiv \mathsf{False} \\
\Diamond\,(\phi \vee \psi) \equiv \Diamond\,\phi \vee \Diamond\,\psi \\
\Box\, \mathsf{True} \equiv \mathsf{True} \\
\Box\,(\phi \wedge \psi) \equiv \Box\,\phi \wedge \Box\,\psi \\
\bigcirc\,(\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi) \equiv \bigcirc\,\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \bigcirc\,\psi
\end{gathered}$$

Lemme 7. On a

1. $\neg(\phi \mathbin{\mathsf{WUntil}} \psi) \equiv \neg\psi \mathbin{\mathsf{Until}} (\neg\psi \wedge \neg\phi)$;
2. $\neg(\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi) \equiv \neg\psi \mathbin{\mathsf{WUntil}} (\neg\psi \wedge \neg\phi)$.

QED

Lemme 8. On a

$$\phi \mathbin{\mathsf{WUntil}} \psi \equiv (\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi) \vee \Box\,\phi.$$

Preuve. Soit $P = [\![(\phi \mathbin{\mathsf{Until}} \psi) \vee \Box\,\phi]\!]$. On va montrer que $P = \nu\big([\![\theta]\!](X)\big)$ où $\theta = \psi \vee (\phi \wedge \bigcirc X)$. On a que $P = [\![\theta]\!](P)$ (c'est « facile »). Soit Q tel que $Q = [\![\theta]\!](Q)$ et on va montrer que $Q \subseteq P$. Soit $\sigma \in Q$.

- ▷ Si $\sigma \in [\![\Box\,\phi]\!]$ alors $\sigma \in P$ par définition de P.

- Sinon soit i le plus petit tel que $\sigma \restriction i \notin [\![\phi]\!]$. Ainsi, par définition, $\sigma \restriction j \in \phi$ pour $j < i$. On montre qu'il existe un certain $k \leq i$ tel que $\sigma \restriction k \in [\![\psi]\!]$. Par l'absurde, supposons que $\sigma \restriction k \notin [\![\psi]\!]$ pour tout $k \leq i$. On voit que pour tout $k < i$, on a $\sigma \restriction k \in [\![\theta]\!](Q) = Q$ donc $\sigma \restriction (i-1) \in [\![\theta]\!](Q) = Q$, et donc $\sigma \restriction (i-1) \notin [\![\psi]\!]$, ce qui implique $\sigma \restriction i \in Q$, ce qui contredit la définition de i (car $\sigma \restriction i \notin [\![\psi]\!]$ et $\sigma \restriction i \notin [\![\phi]\!]$).

QED