Ordres partiels et treillis.

1 Ordres partiels.

Définition 1. Un *ordre partiel* (ou *poset* en anglais) est une paire $(P, \leq)$ où $\leq$ est une relation binaire sur P telle que

- (*reflexivité*) $\forall x \in P, x \leq x$;
- (*transitivité*) $\forall x, y \in P, x \leq y \implies y \leq z \implies x \leq z$;
- (*antisymétrie*) $\forall x, y \in P, x \leq y \implies y \leq x \implies x = y$.

Un préodre est une relation binaire reflexive et transitive.

Exemple 1. On donne quelques exemples de poset :

1. $(\wp(X), \subseteq)$, l'inclusion dans les parties de X
2. $(\Omega X, \subseteq)$, l'inclusion dans les ouverts de X
3. $(\Sigma^\star, \subseteq)$, la relation préfixe dans les mots sur Σ

Attention, dans les trois exemples, il existe deux éléments u, v où

$$u \not\leq v \quad \text{et} \quad v \not\leq u.$$

Définition 2 (Dual). Soit $(P, \leq)$ un poset. Le *dual* de P est $(P, \leq)^{\mathrm{op}} := (P, \geq)$ où

$$a \geq b \iff b \leq a.$$

Définition 3 (Fonction (anti)monotone). Soit $(P, \leq_P)$ et $(L, \leq_L)$ deux posets. Une fonction $f : P \to L$ est *monotone* si pour tout $a, b \in P$ on a

$$a \leq_P b \implies f(a) \leq_L f(b).$$

On dit que $f : (P, \leq) \to (L, \leq)$ est *antimonotone* si $f : (P, {}_{\text{q}}\geq) = (P, \leq_P)^{\text{op}} \to (L, \leq_L)$ est monotone, autrement dit pour tout $a, b \in P$ on a

$$a \leq_P b \implies f(a) \geq_L f(b).$$

2 Treillis complet.

Définition 4. Soit $(A, \leq)$ un poset et $S \subseteq A$.

- Un *upper bound* de S est un élément $a \in A$ tel que $\forall s \in S$, $s \leq a$.
- Un *least upper bound* (*lub*, *join* ou *sup*) de S est un upper bound $a \in A$ de S tel que, pour tout upper bound $b \in A$ de S, on a $a \leq b$.

Par dualité, on a les définitions suivantes.

- Un élément $a \in A$ est un *lower bound* de S ssi a est un upper bound de S dans A^{op}.
- Un élément $a \in A$ est un *greatest lower bound* (*glb*, *meet*, *inf*) de S ssi a est un least upper bound de S dans A^{op}.

On note $\bigvee S$ le least upper bound de S. On note $\bigwedge S$ le greatest lower bound de S.

Exemple 2. Soit $S \subseteq \wp(X)$ alors le least upper bound de S dans $(\wp(X), \subseteq)$ est $\bigcup S \in \wp(X)$. Le greatest lower bound de S dans $(\wp(X), \subseteq)$ est $\bigcap S \in \wp(X)$.

Exemple 3. Soit $S \subseteq \Omega X$ alors le least upper bound dans $(\Omega X, \subseteq)$ est $\bigcup S \in \Omega X$. Le greatest lower bound dans $(\Omega X, \subseteq)$ n'est pas évident. En effet,

$$\{\mathsf{ext}(\mathsf{a}^n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Omega\Sigma^\omega,$$

mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{ext}(\mathsf{a}^n) = \{\mathsf{a}^\omega\} \notin \Omega\Sigma^\omega$.

Exemple 4. Dans $(\Sigma^\star, \subseteq)$ (la relation « préfixe de »), une partie $S \subseteq \Sigma^\star$ n'a pas forcément de sup.

Définition 5. Un poset $(L, \leq)$ est un *treillis complet* si

- ▷ tout $S \subseteq L$ a un sup $\bigvee S \in L$;
- ▷ tout $S \subseteq L$ a un inf $\bigwedge S \in L$.

Remarque 1 (Unicité du lub/glb). Par antisymétrie, si a et b sont deux least upper bound (ou greatest lower bound) alors $a = b$.

En conséquence on a que tout treillis complet a

- ▷ un plus petit élément $\bot := \bigvee \emptyset \in L$;
- ▷ un plus grand élément $\top := \bigwedge \emptyset \in L$.

Remarque 2 (Non-exemple). Le poset $(\Sigma^\star, \subseteq)$ (avec la relation « préfixe de ») n'est ***pas*** un treillis complet, car il n'a pas de plus grand élément $\top$.

Exemple 5. Le poset $(\wp(X), \subseteq)$ (avec la relation d'inclusion ensembliste) est un treillis complet.

Lemme 1. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un poset $(L, \leq)$:

1. $(L, \leq)$ est un treillis complet ;
2. tout $S \subseteq L$ a un sup $\bigvee S \in L$;
3. tout $S \subseteq L$ a un inf $\bigwedge S \in L$;

Preuve. Pour montrer l'implication « 2. $\implies$ 3. », on peut définir

$$\forall S \subseteq L, \quad \bigwedge S := \bigvee \{b \mid \forall s \in S, b \leq s\},$$

et montrer que c'est bien un inf. $\square$

Exemple 6. En revenant sur $(\Omega X, \subseteq)$, c'est un treillis complet dont l'inf de $S \subseteq \Omega X$ est

$$\bigwedge S = \bigcup \{V \in \Omega X \mid V \subseteq \bigcap S\}.$$

Il s'agit de $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap S}}$ qui est l'*intérieur* de $\bigcap S$.

Par exemple, dans $(\Omega\Sigma^\omega, \subseteq)$, on a

$$\bigwedge \{\mathsf{ext}(\mathsf{a}^n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \overset{\circ}{\widehat{\{\mathsf{a}^\omega\}}} = \emptyset.$$

3 Opérateur de clôture.

Définition 6. Soit $(A, \leq)$ un poset. Un *opérateur de clôture* suer $(A, \leq)$ est une fonction

$$c : A \to A$$

telle que

- ▷ c est monotone ;

- c est « *expansive* » : pour tout $a \in A$, $a \leq c(a)$;
- c est *idempotent* : $c(c(a)) = c(a)$ pour tout $a \in A$.

Exemple 7. Soit $(X, \Omega X)$ un espace topologique. Alors

$$\wp(X) \ni A \mapsto \bar{A} \in \wp(X)$$

est un opérateur de clôture sur $(\wp(X), \subseteq)$.

Lemme 2. Soit c un opérateur de clôture sur $(L, \leq)$. On pose

$$L^c := \{a \in L \mid \underbrace{c(a) = a}_{a \in \operatorname{im} c}\}.$$

Si $(L, \leq)$ est un treillis complet alors $(L^c, \leq)$ est un treillis complet avec

$$\forall S \subseteq L^c, \qquad \bigwedge^{L^c} S = \bigwedge^{L} S.$$

Exemple 8. Pour $\overline{(-)} : \wp(X) \to \wp(X)$ où $(X, \Omega X)$ est un espace topologique, on a

$$\big(\wp(X)\big)^{\overline{(-)}} = \{F \in \wp(X) \mid F \text{ fermé}\}.$$

Dans ce treillis complet :

$$\bigwedge \mathscr{F} = \bigcap \mathscr{F} \qquad \text{et} \qquad \bigvee \mathscr{F} = \overline{\bigcup \mathscr{F}},$$

où $\mathscr{F}$ est un ensemble de fermés.

4 Connexion de Galois.

Définition 7. Considérons deux posets $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$. Une *connexion de Galois* $g \dashv f : A \to B$ est une paire (f, g) de fonctions :

$$f : B \to A \qquad \text{et} \qquad g : A \to B$$

telle que

$$g(a) \leq_B b \iff a \leq_A f(b).$$

Exemple 9. Soit $f : X \to Y$ une fonction. On possède deux « lifts » de f sur les powersets :

- ▷ le lift covariant $f_! : \begin{array}{rcl} \wp(X) & \longrightarrow & \wp(Y) \\ A & \longmapsto & \{f(a) \mid a \in A\} \end{array}$;
- ▷ le lift contravariant $f^\bullet : \begin{array}{rcl} \wp(Y) & \longrightarrow & \wp(X) \\ B & \longmapsto & \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{array}$.[1]

On a que $f_! \dashv f^\bullet$. En effet, pour tout $A \in \wp(X)$ et $B \in \wp(Y)$,

$$\begin{aligned} f_!(A) \subseteq B &\iff \forall x \in X, (x \in A \implies f(x) \in B) \\ &\iff A \subseteq f^\bullet(B). \end{aligned}$$

Exemple 10. Soit Σ un alphabet. On a, d'une part,

$$\begin{aligned} \mathrm{Pref} : \wp(\Sigma^\omega) &\longrightarrow \wp(\Sigma^\star) \\ A &\longmapsto \underbrace{\{\hat\sigma \in \Sigma^\star \mid \exists \sigma \in A, \hat\sigma \subseteq \sigma\}}_{\bigcup_{\sigma \in A} \mathrm{Pref}(\sigma)}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{cl} : \wp(\Sigma^\star) &\longrightarrow \wp(\Sigma^\omega) \\ W &\longmapsto \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \mathrm{Pref}(\sigma) \subseteq W\}. \end{aligned}$$

Attention, ce n'est pas le cl vu en TD. On a que

$$\mathrm{Pref}(-) \dashv \mathrm{cl}(-).$$

[1] On note habituellement f^* et non $f^\bullet$, mais vu qu'on utilise souvent « $*$ » dans le cours, on change de notation.

Lemme 3.

- ▷ Si $g \dashv f$ et $g' \dashv f$ alors $g = g'$.
- ▷ Si $g \dashv f$ et $g \dashv f'$ alors $f = f'$.
- ▷ Si $g \dashv f$ alors g et f sont monotones.

Preuve. Vu en TD. □

Dans $g \dashv f$, on dit que

- ▷ g est un *adjoint à gauche* de f ;
- ▷ f est un *adjoint à droite* de g.

Lemme 4. Si $g \dashv f : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ alors

$$f \circ g : A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A$$

est un opérateur de clôture sur $(A, \leq_A)$.[2]

Preuve. Vu en TD. □

Exemple 11. Pour $\mathrm{Pref}(-) \dashv \mathrm{cl}(-) : \wp(\Sigma^\omega) \to \wp(\Sigma^\star)$, le lemme précédent nous donne l'opérateur de clôture

$$\begin{aligned} \mathrm{cl} \circ \mathrm{Pref} : \wp(\Sigma^\omega) &\longrightarrow \wp(\Sigma^\omega) \\ A &\longmapsto \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid \mathrm{Pref}(\sigma) \subseteq \mathrm{Pref}(A)\} \end{aligned}$$

(c'est le $\mathrm{cl}(-)$ vu en TD) est la clôture topologique pour $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$.

Remarque 3. En particulier, $A \subseteq \Sigma^\omega$ est un fermé si et seulement s'il existe un arbre $T \subseteq \Sigma^\star$ tel que

$$A = \{\pi \in \Sigma^\omega \mid \pi \text{ chemin infini dans } T\}.$$

On a que $\mathrm{cl} \circ \mathrm{Pref}(A)$ qui est un arbre sur Σ.

[2] Attention à ne pas se tromper sur le sens de la composition !

Corollaire 1. ▷ Une propriété $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ est de sûreté si et seulement si on a $P = \mathrm{cl}(\mathrm{Pref}(P))$.

▷ Une propriété $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ est de vivacité si et seulement si on a $(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega = \mathrm{cl}(\mathrm{Pref}(P))$.

Preuve. (Déjà) vu en TD. Ceci correspond exactement au fait que

▷ P est de sûreté ssi P est fermé dans $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$;

▷ P est de vivacité ssi P est dense dans $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$;

▷ $\mathrm{cl} \circ \mathrm{Pref}$ est exactement $\overline{(-)}$ dans $(\Sigma^\omega, \Omega\Sigma^\omega)$.

□

Proposition 1. Une propriété $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ est de vivacité si et seulement si $\mathrm{Pref}(P) = (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\star$.

Preuve. En effet, par adjonction (connexion de Galois), on a

$$(\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\star = \mathrm{Pref}((\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega) \subseteq \mathrm{Pref}(P) \iff (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{Pref}(P)).$$

□

Quelques propriétés des connexions de Galois.

Lemme 5. Soit $g \dashv f : A \to B$ une connexion de Galois.

1. pour tout $S \subseteq A$ tel que $\bigvee S \in A$ alors $g(\bigvee S) = \bigvee g_!(S)$;
2. pour tout $S \subseteq B$ tel que $\bigwedge S \in B$ alors $f(\bigwedge S) = \bigwedge f_!(S)$.

Remarque 4. Dans le lemme précédent, il est important de remarquer que l'on a une implication « cachée » : $\bigvee S$ existe dans A implique $\bigvee g_!(S)$ existe dans B (et idem pour $\bigwedge$ et f).

Lemme 6. Soient $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ deux treillis complets.

1. Si $g : A \to B$ préserve les sups (*i.e.* $g(\bigvee S) = \bigvee g_!(S)$) alors il existe une fonction $f : B \to A$ telle que $g \dashv f$. Cette fonction est :

$$f(b) := \bigvee\{a \in A \mid g(a) \leq_B b\}.$$

2. Si $f : B \to A$ préserve les infs alors il existe une fonction $g : A \to B$ telle que $g \dashv f$. Cette fonction est :

$$g(a) := \bigwedge\{b \in B \mid a \leq_A f(b)\}.$$

Exemple 12 (Algèbres de Heyting complètes). Soit $(L, \leq)$ un treillis complet. Soit $a \in L$. On a une fonction

$$\begin{aligned} - \wedge a : L &\longrightarrow L \\ b &\longmapsto b \wedge a = \bigwedge\{a, b\}. \end{aligned}$$

On dit que $(L, \leq)$ est une *algèbre de Heyting complète* si, pour tout $a \in A$, la fonction $- \wedge a$ a un adjoint à gauche. Si cet adjoint existe, on le note $a \Rightarrow -$. Ceci nous donne que

$$\forall a, b, c \in L, \qquad b \wedge a \leq c \iff b \leq a \Rightarrow c.$$

On a l'équivalence entre :

- $(L, \leq)$ est une algèbre de Heyting complète ;
- pour tout $a \in L$, $- \wedge a : L \to L$ préserve les sups, autrement dit pour tout $S \subseteq L$,

$$\left(\bigvee S\right) \wedge a = \bigvee\{s \wedge a \mid s \in S\}.$$

C'est une sorte de distributivité.

Dans ce cas, on a que

$$a \Rightarrow c = \bigvee\{b \mid b \wedge a \leq c\}.$$