Sémantique opérationnelle des expressions arithmétiques avec déclarations locales (LEA).

On suppose donnés $\mathbb{Z}$ les entiers relatifs et $\mathscr{V}$ un ensemble infini de variables (d'identifiants/d'identificateurs/de noms).

On définit LEA par la grammaire suivante :

$$a ::= \underline{k} \mid a_1 \oplus a_2 \mid \texttt{let}\, x = a_1 \ \texttt{in} \ a_2 \mid x,$$

où $x \in \mathscr{V}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

En Rocq, on peut définir :

```
Inductive LEA : Set :=
| Cst : ℤ → LEA
| Add : LEA → LEA → LEA
| Let : 𝒱 → LEA → LEA → LEA
| Var : 𝒱 → LEA.
```

Code 1 | *Définition inductive de* LEA

Exemple 1. Voici quelques exemples d'expressions avec déclarations locales :

1. $\texttt{let}\, x = 3 \ \texttt{in} \ x \oplus x$;
2. $\texttt{let}\, x = \underline{2} \ \texttt{in} \ \texttt{let}\, y = x \oplus \underline{2} \ \texttt{in} \ x \oplus y$;

3. $\texttt{let}\, x = (\texttt{let}\, y = \underline{5} \texttt{ in } y \oplus y) \texttt{ in } (\texttt{let}\, z = \underline{6} \texttt{ in } z \oplus \underline{2}) \oplus x\,;$
4. $\texttt{let}\, x = \underline{7} \oplus \underline{2} \texttt{ in } (\texttt{let}\, x = 5 \texttt{ in } x \oplus x) \oplus x.$

1 Sémantique à grands pas sur LEA.

On définit une relation d'*évaluation* $\Downarrow : \mathsf{LEA} * \mathbb{Z}$ [1] définie par :

$$\frac{}{\underline{k} \Downarrow k} \qquad {\scriptstyle k = k_1 + k_2}\ \frac{a_1 \Downarrow k_1 \qquad a_2 \Downarrow k_2}{a_1 \oplus a_2 \Downarrow k},$$

et on ajoute une règle pour le $\texttt{let}\, x = \ldots \texttt{ in } \ldots$:

$$\frac{a_1 \Downarrow k_1 \qquad a_2\left[{}^{\underline{k_1}}/_{x}\right] \Downarrow k_1}{(\texttt{let}\, x = a_1 \texttt{ in } a_2) \Downarrow k_2}.$$

On note ici $a[{}^{\underline{k}}/_{x}]$ la substitution de $\underline{k}$ à la place de x dans l'expression a. Ceci sera défini après.

Attention : on n'a pas de règles de la forme

$$\cancel{\frac{}{x \Downarrow \boxed{?}}},$$

les variables sont censées disparaitre avant qu'on arrivent à elles.

Définition 1. Soit $a \in \mathsf{LEA}$. L'ensemble des *variables libres* d'une expression a noté $\mathscr{V}\!\ell(a)$, et est défini par induction sur a de la manière suivante :

- ▷ $\mathscr{V}\!\ell(\underline{k}) = \emptyset\,;$
- ▷ $\mathscr{V}\!\ell(x) = \{x\}\,;$
- ▷ $\mathscr{V}\!\ell(a_1 \oplus a_2) = \mathscr{V}\!\ell(a_1) \cup \mathscr{V}\!\ell(a_2)\,;$
- ▷ $\mathscr{V}\!\ell(\texttt{let}\, x = a_1 \texttt{ in } a_2) = \mathscr{V}\!\ell(a_1) \cup (\mathscr{V}\!\ell(a_2) \setminus \{x\}).$

1. On surcharge encore les notations.

Exemple 2.

$$\mathscr{V}\ell(\texttt{let}\, x = \underline{3} \;\texttt{in}\; \texttt{let}\, y = x \oplus \underline{2} \;\texttt{in}\; y \oplus (z \oplus \underline{15})) = \{z\}.$$

Définition 2. Une expression $a \in \mathsf{LEA}$ est *close* si $\mathscr{V}\ell(a) = \emptyset$. On note $\mathsf{LEA}_0 \subseteq \mathsf{LEA}$ l'ensemble des expressions arithmétiques de closes.

Définition 3. Soient $a \in \mathsf{LEA}$, $x \in \mathscr{V}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit par induction sur a (*quatre cas*) le résultat de la *substitution* de x par $\underline{k}$ dans a, noté $a[{}^{\underline{k}}/_x]$ de la manière suivante :

- $\underline{k'}[{}^{\underline{k}}/_x] = \underline{k'}$;
- $(a_1 \oplus a_2)[{}^{\underline{k}}/_x] = (a_1[{}^{\underline{k}}/_x]) \oplus (a_2[{}^{\underline{k}}/_x])$;
- $y[{}^{\underline{k}}/_x] = \begin{cases} \underline{k} & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y\,; \end{cases}$
- $(\texttt{let}\, y = a_1 \;\texttt{in}\; a_2)[{}^{\underline{k}}/_x] = \begin{cases} \texttt{let}\, y = a_1[{}^{\underline{k}}/_x] \;\texttt{in}\; a_2 & \text{si } x = y \\ \texttt{let}\, y = a_1[{}^{\underline{k}}/_x] \;\texttt{in}\; a_2[{}^{\underline{k}}/_x] & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

2 Sémantique à petits pas sur LEA.

On définit la relation $\to\, \subseteq \mathsf{LEA} * \mathsf{LEA}$ inductivement par :

$$\frac{}{\underline{k_1} \oplus \underline{k_2} \to \underline{k}}\;\mathscr{A}\quad {\scriptstyle k = k_1 + k_2},$$

$$\frac{a_2 \to a_2'}{a_1 \oplus a_2 \to a_1 \oplus a_2'}\;\mathscr{C}_{\mathrm{d}} \quad\text{et}\quad \frac{a_1 \to a_1'}{a_1 \oplus \underline{k} \to a_1' \oplus \underline{k}}\;\mathscr{C}_{\mathrm{g}},$$

puis les nouvelles règles pour le $\texttt{let}\, x = \ldots \;\texttt{in}\; \ldots$:

$$\frac{a_1 \to a_1'}{\texttt{let}\, x = a_1 \;\texttt{in}\; a_2 \to \texttt{let}\, x = a_1' \;\texttt{in}\; a_2}\;\mathscr{C}_{\mathrm{l}}$$

$$\frac{}{\texttt{let}\, x = \underline{k} \;\texttt{ in }\; a \to a[\underline{k}/x]}.$$

On peut démontrer l'équivalence des sémantiques à grands pas et à petits pas.

3 Sémantique contextuelle pour LEA.

On définit les contextes d'évaluations par la grammaire suivante :

$$\begin{aligned} E ::= \;& [\,] \\ \mid\;& a \oplus E \\ \mid\;& E \oplus \underline{k} \\ \mid\;& \texttt{let}\, x = E \;\texttt{ in }\; a. \end{aligned}$$

On définit *deux* relations $\mapsto_{\mathrm{a}}$ et $\mapsto$ par les règles :

$$k = k_1 + k_2 \; \frac{}{\underline{k_1} \oplus \underline{k_2} \mapsto_{\mathrm{a}} \underline{k_2}} \qquad \frac{}{\texttt{let}\, x = \underline{k} \;\texttt{ in }\; a \mapsto_{\mathrm{a}} a[\underline{k}/x]},$$

et

$$\frac{a \mapsto_{\mathrm{a}} a'}{E[a] \mapsto E[a']}.$$

4 Sémantique sur LEA avec environnement.

Définition 4. Soient A et B deux ensembles. Un *dictionnaire* sur (A, B) est une fonction partielle à domaine fini de A dans B.

Si D est un dictionnaire sur (A, B), on note $D(x) = y$ lorsque D associe $y \in B$ à $x \in A$.

Le domaine d'un dictionnaire D est

$$\operatorname{dom}(D) = \{x \in A \mid \exists y \in B, D(x) = y\}.$$

On note $\emptyset$ le dictionnaire vide.

Pour un dictionnaire D sur (A, B), deux éléments $x \in A$ et $y \in B$, on note $D[x \mapsto y]$ est le dictionnaire D' défini par

- $D'(x) = y$;
- $D'(z) = D(z)$ pour $z \in \mathrm{dom}(D)$ tel que $z \neq x$.

On ne s'intéresse pas à la construction d'un tel type de donné, mais juste son utilisation.

On se donne un ensemble Env d'*environnements* notés $\mathscr{E}, \mathscr{E}', \ldots$ qui sont des dictionnaires sur $(\mathscr{V}, \mathbb{Z})$.

4.1 Sémantique à grands pas sur LEA avec environnements.

On définit la relation $\Downarrow \subseteq \mathsf{LEA} * \mathrm{Env} * \mathbb{Z}$, noté $a, \mathscr{E} \Downarrow k$ (« a s'évalue en k dans $\mathscr{E}$ ») défini par

$$\frac{}{\underline{k}, \mathscr{E} \Downarrow k} \qquad {\scriptstyle k = k_1 + k_2}\ \frac{a_1, \mathscr{E} \Downarrow k_1 \qquad a_2, \mathscr{E} \Downarrow k_2}{a_1 \oplus a_2, \mathscr{E} \Downarrow k} \qquad {\scriptstyle \mathscr{E}(x) = k}\ \frac{}{x, \mathscr{E} \Downarrow k},$$

$$\frac{a_1, \mathscr{E} \Downarrow k_1 \qquad a_2, \mathscr{E}[x \mapsto k_1] \Downarrow k_2}{\texttt{let}\ x \ \texttt{=}\ a_1\ \texttt{in}\ a_2 \Downarrow k_2}.$$

Remarque 1.
- Dans cette définition, on n'a pas de substitutions (c'est donc plus facile à calculer).
- Si $\mathscr{V}\ell(a) \subseteq \mathrm{dom}(\mathscr{E})$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a, \mathscr{E} \Downarrow k$.
- On a $a \Downarrow k$ (sans environnement) si, et seulement si $a, \emptyset \Downarrow k$ (avec environnement).

Pour les petits pas avec environnements, c'est un peu plus compliqué. . .On verra ça en TD. (Écraser les valeurs dans un dictionnaire, ça peut être problématique avec les petits pas.)