Théorèmes de point fixe.

Dans cette section, on va formaliser les raisonnements que l'on a réalisé en section **??** à l'aide du théorème de Knaster-Tarksi.

Définition 1. Soit E un ensemble, une relation $\mathscr{R} \subseteq E^2$ est un *ordre partiel* si $\mathscr{R}$ est :

- ▷ réflexive : $\forall x \in E,\ x \mathrel{\mathscr{R}} x$;
- ▷ transitive : $\forall x, y, z \in E,\ (x \mathrel{\mathscr{R}} y \text{ et } y \mathrel{\mathscr{R}} z) \implies x \mathrel{\mathscr{R}} z$;
- ▷ antisymétrique : $\forall x, y \in E,\ (x \mathrel{\mathscr{R}} y \text{ et } y \mathrel{\mathscr{R}} x) \implies x = y$.

Exemple 1. Dans l'ensemble $E = \mathbb{N}$, les relations $\leq$ et $\mid$ (division) sont des ordres partiels.

Définition 2. Soit $(E, \sqsubseteq)$ un ordre partiel.

- ▷ Un *minorant* d'une partie $A \subseteq E$ est un $m \in E$ tel que
$$\forall x \in A,\ m \sqsubseteq x.$$
- ▷ Un *majorant* d'une partie $A \subseteq E$ est un $m' \in E$ tel que
$$\forall x \in A,\ x \sqsubseteq m'.$$
- ▷ Un *treillis complet* est un ordre partiel $(E, \sqsubseteq)$ tel que toute partie $A \subseteq E$ admet un *plus petit majorant*, noté $\bigsqcup A$, et un *plus grand minorant*, noté $\bigsqcap A$.

Remarque 1.
- $\triangleright$ Pour tout minorant m de A, on a $m \sqsubseteq \bigsqcap A$.
- $\triangleright$ Pour tout majorant m' de A, on a $\bigsqcup A \sqsubseteq m'$.
- $\triangleright$ Un minorant/majorant de A n'est pas nécessairement dans l'ensemble A. Ceci est notamment vrai pour $\bigsqcap A$ et $\bigsqcup A$.

Notation. On note généralement $\bot = \bigsqcap E$, et $\top = \bigsqcup E$.

Exemple 2.
- $\triangleright$ L'ensemble $(\mathbb{N}, \leq)$ n'est pas un treillis complet : si A est infini, il n'admet pas de plus petit majorant.
- $\triangleright$ L'ensemble $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ est un treillis complet avec la convention $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \infty$.
- $\triangleright$ L'ensemble $(\mathbb{N}, |)$ est un treillis complet :
  - pour $A \subseteq \mathbb{N}$ fini, on a
  $$\bigsqcup A = \operatorname{ppcm} A \quad \text{et} \quad \bigsqcap A = \operatorname{pgcd} A;$$
  - pour $A \subseteq \mathbb{N}$ infini, les relations ci-dessus restent valables avec la convention :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \mid 0.$$

Exemple 3 (Exemple *très* important de treillis complet). Soit E_0 un ensemble. Alors l'ensemble $(\wp(E_0), \subseteq)$ des parties de E_0 est un treillis complet. En particulier, on a :
$$\bigsqcap = \bigcap, \quad \bigsqcup = \bigcup, \quad \bot = \emptyset \quad \text{et} \quad \top = E_0.$$

Théorème 1 (Knaster-Tarski). Soit $(E, \sqsubseteq)$ un treillis complet. Soit f une fonction croissante de E dans E.[1] On considère l'ensemble
$$F_f = \{x \in E \mid f(x) \sqsubseteq x\},$$
l'ensemble des *prépoints fixes* de f. Posons $m = \bigsqcap F_f$. Alors, m

est un point fixe de f, *i.e.* $f(m) = m$.

Preuve. Soit $y \in F_f$, alors $m \sqsubseteq y$, et par croissance de f, on a ainsi $f(m) \sqsubseteq f(y)$, ce qui implique $f(m) \sqsubseteq y$ par transitivité (et car $y \in F_f$). D'où, $f(m)$ est un minorant de F_f.

Or, par définition, $f(m) \sqsubseteq m$, et par croissance $f(f(m)) \sqsubseteq f(m)$, ce qui signifie que $f(m) \in F_f$. On en déduit $m \sqsubseteq f(m)$.

Par antisymétrie, on en conclut que $f(m) = m$. □

À la suite de ce théorème, on peut formaliser les raisonnements que l'on a réalisé en section ??. Pour cela, il nous suffit d'appliquer le théorème 1 de Knaster-Tarksi (abrégé en « théorème K-T »).

1 Définitions inductives de relations.

Remarque 2. Pour justifier la définition des relations, on applique le théorème K-T. En effet, on part de $E = E_1 * \cdots * E_n$. Les relations sont des sous-ensembles de E, on travaille donc dans le treillis complet $(\wp(E), \subseteq)$. On se donné une définition inductive d'une relation $\mathsf{Rel} \subseteq E$. Pour cela, on s'appuie sur les règles d'inférences et on associe à chaque $\mathscr{R}_i$ une fonction

$$f_i : \wp(E) \to \wp(E).$$

On montre (constate) que les f_i définies sont croissantes. Enfin, on pose pour $A \subseteq E$,

$$f(A) = f_1(A) \cup \cdots \cup f_k(A).$$

La fonction $f \mapsto f(A)$ est croissante.

Par définition, Rel est défini comme le plus petit (pré)-point fixe de la fonction f, qui existe par le théorème K-T (théorème 1).

1. Ceci signifie que $\forall a, b \in E, \quad a \sqsubseteq b \implies f(a) \sqsubseteq f(b)$.

Exemple 4. Définissons $\mathsf{le} \subseteq \mathsf{nat} * \mathsf{nat}$. On rappelle les règles d'inférences pour cette relation :

$$\frac{}{\mathsf{le}(n, n)}\ \mathscr{L}_1 \qquad \frac{\mathsf{le}(n, k)}{\mathsf{le}(n, \mathtt{S}\ k)}\ \mathscr{L}_2.$$

Avec un ensemble $A \subseteq \mathsf{nat} * \mathsf{nat}$, on définit

$$f_1(A) = \{(n, n) \mid n \in \mathsf{nat}\},$$

$$f_2(A) = \{(n, \mathtt{S}\ k) \mid (n, k) \in A\};$$

et on pose enfin

$$f(A) = f_1(A) \cup f_2(A).$$

La définition formelle de la relation le est le plus petit point fixe de f.

Exemple 5 (Suite de l'exemple ??). Définissons $\mathsf{triée} \subseteq \mathsf{nlist}$. On rappelle les règles d'inférences pour cette relation :

$$\frac{}{\mathsf{triée}\ \mathtt{Nil}}\ \mathscr{T}_1 \qquad \frac{}{\mathsf{triée}\ \mathtt{Cons}(x, \mathtt{Nil})}\ \mathscr{T}_2,$$

$$\frac{\mathsf{le}(x, y) \qquad \mathsf{triée}\ \mathtt{Cons}(x, \mathtt{Nil})}{\mathsf{triée}\ \mathtt{Cons}(x, \mathtt{Cons}(y, \ell))}\ \mathscr{T}_3.$$

Avec un ensemble $A \subseteq \mathsf{nlist}$, on définit

$$\begin{aligned} f_1(A) &= \{\mathtt{Nil}\}, \\ f_2(A) &= \{\mathtt{Cons}(k, \mathtt{Nil}) \mid k \in \mathsf{nat}\}, \\ f_3(A) &= \left\{ \mathtt{Cons}(x, \mathtt{Cons}(y, \ell)) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathtt{Cons}(y, \ell) \in A \\ \mathsf{le}(x, y) \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

et on pose enfin

$$f(A) = f_1(A) \cup f_2(A).$$

La définition formelle de la relation le est le plus petit point fixe de f.

Remarque 3. Dans les exemples ci-avant, même si l'on ne l'a pas précisé, les fonctions f_i sont bien croissantes pour l'inclusion $\subseteq$. C'est ceci qui assure l'application du théorème K-T (théorème 1).

Comme dit dans la remarque **??**, on ne définit pas de règles d'induction de la forme

$$\cancel{\frac{\neg\mathsf{Rel}(x'_1,\ldots,x'_{n'})}{\mathsf{Rel}(x_1,\ldots,x_n)}} \qquad \longrightarrow \qquad \text{C'est interdit !}$$

En effet, la fonction f définie n'est donc plus croissante.

Remarque 4. Une relation R définie comme le plus petit point fixe d'une fonction f vérifie, mais on ne demande en rien que l'on ait $A \subseteq f(A)$ quel que soit $A \subseteq E$. En effet, pour

$$f(\{(3,2)\}) = \{(n,n) \mid n \in \mathsf{nat}\} \cup \{(3,1)\}$$

ne vérifie pas cette propriété.

2 Définitions inductives d'ensembles.

Exemple 6. On reprend le type $\mathtt{t}_2$ défini à l'exemple **??** :

```
type t₂ =
| F
| N2 of (t * nlist * t)
| N3 of (t * nat * t * nat * t)
```

Code 1 | *Un exemple de type*

On le définit en utilisant le théorème K-T (théorème 1) en posant :

$$\begin{aligned}
f_1(A) &= \{\mathtt{F}\}\\
f_2(A) &= \{(x, \ell, y) \mid \ell \in \mathsf{nlist} \text{ et } (x, y) \in A^2\}\\
f_3(A) &= \left\{ (x, k_1, y, k_2, z) \;\middle|\; \begin{array}{l} (x, y, z) \in A^3 \\ (k_1, k_2) \in \mathsf{nat}^2 \end{array} \right\},
\end{aligned}$$

puis, quel que soit A,

$$f(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A).$$

On pose ensuite t_2 comme le plus petit point fixe de f.

Exemple 7. Avec $\mathsf{nat} = \{\mathtt{Z}, \mathtt{S}\ \mathtt{Z}, \mathtt{S}\ \mathtt{S}\ \mathtt{Z}, \dots\}$, on utilise

$$f(A) = \{\mathtt{Z}\} \cup \{\mathtt{S}\ n \mid n \in A\},$$

et on pose nat le plus petit point fixe de f.

Et si on retire le cas de base ? Que se passe-t-il ? On pose la fonction

$$f'(A) = \{\mathtt{S}\ n \mid n \in A\}.$$

Le plus petit point fixe de f est l'ensemble vide $\emptyset$. On ne définit donc pas les entiers naturels.

Remarque 5. Après quelques exemples, il est important de se demander comment f est définie. C'est une fonction de la forme

$$f : \wp(\boxed{?}) \to \wp(\boxed{?}).$$

Quel est l'ensemble noté « $\boxed{?}$ » ? Quel est l'*ensemble ambiant* ?

La réponse est : c'est l'ensemble des arbres étiquetés par des chaînes de caractères.

Remarque 6. Pour définir inductivement un relation, on peut considérer qu'on construit un ensemble de dérivation.

Par exemple, pour le, on aurait

$$f_2(A) = \left\{ \frac{\delta}{\mathsf{le}(n, \mathtt{S}\ k)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta \text{ est une dérivation de } \mathsf{le}(n,k) \textit{ i.e.}, \\ \delta \text{ est une dérivation dont } \mathsf{le}(n,k) \text{ est} \\ \text{à la racine} \end{array} \right\}.$$

3 Preuves par induction sur un ensemble inductif.

Remarque 7. Soit $\mathtt{t}$ un ensemble défini par induction par les constructeurs $\mathtt{C}_1, \dots, \mathtt{C}_n$. On pose f tel que $\mathtt{t}$ est le plus petit pré-point fixe de f.

On veut montrer $\forall x \in \mathtt{t}, \mathscr{P}(x)$. Pour cela, on pose

$$A = \{x \in \mathtt{t} \mid \mathscr{P}(x)\},$$

et on montre que $f(A) \subseteq A$, *i.e.* A est un pré-point fixe de f. Ceci implique, par définition de $\mathtt{t}$, que $\mathtt{t} \subseteq A$, d'où

$$\forall x, x \in \mathtt{t} \implies \mathscr{P}(x).$$

Exemple 8. Expliquons ce que veut dire « montrer $f(A) \subseteq A$ » sur un exemple.

Pour nlist, on pose deux fonctions

$$\begin{aligned} f_1(A) &= \{\mathtt{Nil}\} \\ f_2(A) &= \{\mathtt{Cons}(k, \ell) \mid \ell \in A\} \end{aligned}$$

.

Pour montrer $f(A) \subseteq A$, il y a *deux* cas :

- (pour f_1) montrer $\mathscr{P}(\texttt{Nil})$;
- (pour f_2) avec l'hypothèse d'induction $\mathscr{P}(\ell)$, et $k \in \mathsf{nat}$, montrer $\mathscr{P}(\texttt{Cons}(n, \ell))$.

4 Preuves par induction sur une relation inductive.

4.1 Une première approche...

Remarque 8. Soit Rel une relation définie comme le plus petit (pré)point fixe d'une fonction f, associée aux k règles d'inférences $\mathscr{R}_1, \ldots, \mathscr{R}_k$. On veut montrer que

$$\forall (x_1, \ldots, x_m) \in E, \quad \mathsf{Rel}(x_1, \ldots, x_m) \implies \mathscr{P}(x_1, \ldots, x_m).$$

Pour cela, on pose $A = \{(x_1, \ldots, x_m) \in E \mid \mathscr{P}(x_1, \ldots, x_m)\}$, et on montre que $f(A) \subseteq A$, *i.e.* que A est un prépoint fixe de f. Ainsi, on aura $\mathsf{Rel} \subseteq A$ et on aura donc montré

$$\forall (x_1, \ldots, x_m) \in E, \quad \mathsf{Rel}(x_1, \ldots, x_m) \implies \mathscr{P}(x_1, \ldots, x_m).$$

Exemple 9. Pour le, prouver $f(A) \subseteq A$ signifie prouver deux propriétés :

1. $\forall n \in \mathsf{nat}, \mathscr{P}(n)$;
2. $\forall (n, k) \in \mathsf{nat}^2, \underbrace{\mathscr{P}(n, k)}_{\text{hyp. ind.}} \implies \mathscr{P}(n, \mathtt{S}\ k)$

Exemple 10. Pour $\mathsf{triée}$, on a *trois* propriétés à prouver :

1. $\mathscr{P}(\texttt{Nil})$;
2. $\forall k \in \mathsf{nat}, \mathscr{P}(\texttt{Cons}(k, \texttt{Nil}))$;

3. $\forall (x,y) \in \mathsf{nat}^2, \forall \ell \in \mathsf{nlist}$,
$$\underbrace{\mathscr{P}(\mathtt{Cons}(y,\ell))}_{\text{hyp.ind}} \land \mathsf{le}(x,y) \implies \mathscr{P}(\mathtt{Cons}(x, \mathtt{Cons}(y,\ell))).$$

Remarque 9. Remarquons que dans l'exemple 10 ci-dessus, dans le 3ème cas, on n'a pas d'hypothèse $\mathsf{triée}(\mathtt{Cons}(y,\ell))$. Ceci vient du fait que, dans la remarque 7, l'ensemble A ne contient pas que des listes triées. La contrainte de la relation n'a pas été appliquée, on n'a donc pas accès à cette hypothèse.

4.2 Une approche plus astucieuse...

Remarque 10. On modifie légèrement le raisonnement présenté en remarque 7. On pose
$$A' = \{(x_1, \ldots, x_m) \in E \mid \mathsf{Rel}(x_1, \ldots, x_m) \land \mathscr{P}(x_1, \ldots, x_m)\}.$$

On montre $f(A') \subseteq A'$ et donc, par définition de Rel, on aura l'inclusion $\mathsf{Rel} \subseteq A'$. Avec ce raisonnement, on peut utiliser des hypothèses, comme montré dans les exemples 11 et 12. Le but de la preuve n'est donc plus $\mathscr{P}(\ldots)$ mais $\mathsf{Rel}(\ldots) \land \mathscr{P}(\ldots)$.

En rouge sont écrits les différences avec le raisonnement précédent.

Exemple 11 (Version améliorée de l'exemple 9). Pour le, prouver $f(A) \subseteq A$ signifie prouver deux propriétés :

1. $\forall n \in \mathsf{nat}, \mathsf{le}(n,n) \land \mathscr{P}(n)$;
2. $\forall (n,k) \in \mathsf{nat}^2, \underbrace{\mathsf{le}(n,k) \land \mathscr{P}(n,k)}_{\text{hyp. ind.}} \implies \mathsf{le}(n, \mathsf{S}\ k) \land \mathscr{P}(n, \mathsf{S}\ k)$

Exemple 12 (Version améliorée de l'exemple 10). Pour $\mathsf{triée}$, on a *trois* propriétés à prouver :

1. $\mathsf{triée}(\texttt{Nil}) \wedge \mathscr{P}(\texttt{Nil})$;
2. $\forall k \in \mathsf{nat}, \mathsf{triée}(\texttt{Cons}(k, \texttt{Nil})) \wedge \mathscr{P}(\texttt{Cons}(k, \texttt{Nil}))$;
3. $\forall (x, y) \in \mathsf{nat}^2, \forall \ell \in \mathsf{nlist},$

$$\overbrace{\mathsf{triée}(\texttt{Cons}(y, \ell)) \wedge \mathscr{P}(\texttt{Cons}(y, \ell))}^{\text{hyp.ind}} \wedge \mathsf{le}(x, y)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathsf{triée}(\texttt{Cons}(x, \texttt{Cons}(y, \ell))) \wedge \mathscr{P}(\texttt{Cons}(x, \texttt{Cons}(y, \ell)))$$

5 Domaines et points fixes.

Définition 3. Soit $(E, \sqsubseteq)$ un ordre partiel. Une *chaîne infinie* dans l'ensemble ordonné $(E, \sqsubseteq)$ est une suite $(e_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$e_0 \sqsubseteq e_1 \sqsubseteq e_2 \sqsubseteq \cdots .$$

On dit que $(E, \sqsubseteq)$ est *complet* si pour toute chaîne infinie, il existe $\bigsqcup_{n \geq 0} e_n \in E$, un plus petit majorant dans E.

Si, de plus, E a un plus petit élément $\perp$, alors $(E, \sqsubseteq)$ est un *domaine.*

Remarque 11. Un treillis complet est un domaine.

Théorème 2. Soit $(E, \sqsubseteq)$ un domaine. Soit $f : E \to E$ *continue* :

- ▷ f est croissante ;
- ▷ pour toute chaîne infinie $(e_n)_{n \geq 0}$,

$$f\Big(\bigsqcup_{n \geq 0} e_n\Big) = \bigsqcup_{n \geq 0} f(e_n).$$

Les $(f(e_n))_{n \geq 0}$ forment une chaîne infinie par croissance de la fonction f.

On pose, quel que soit $x \in E$, $f^0(x) = x$, et pour tout entier $i \geq 0$, on définit $f^{i+1}(x) = f(f^i(x))$.

On pose enfin

$$\begin{aligned} \operatorname{fix}(f) &= \bigsqcup_{n \geq 0} f^n(\perp) \\ &= \perp \sqcup f(\perp) \sqcup f^2(\perp) \sqcup \cdots . \end{aligned}$$

Alors, $\operatorname{fix}(f)$ est le plus petit point fixe de f.

Preuve. La preuve viendra plus tard. □

Les définitions inductives par constructeurs ou règles d'inférences peuvent être définis par des fonctions continues. Et, on peut se placer dans le domaine $(\wp(E), \subseteq)$ pour définir les ensembles définis par inductions.

Exemple 13. Avec les listes d'entiers, on définit

$$\mathsf{nat} = \underbrace{\emptyset}_{\perp} \cup \underbrace{\{\texttt{Nil}\}}_{f(\perp)} \cup \underbrace{\{\texttt{Cons}(k, \texttt{Nil}) \mid k \in \mathsf{nat}\}}_{f^2(\perp)} \cup \cdots .$$