PREUVE FORMELLE DE LA CLASSIFICATION DES REVÊTEMENTS EN THÉORIE DES TYPES HOMOTOPIQUES

Stage au LIX, École Polytechnique
Hugo SALOU

1er septembre 2025

SOMMAIRE ET THÈMES

MON STAGE

I. TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

TOPOLOGIE

ALGÈBRE (THÉORIE DES GROUPES)

HOMOTOPIE

" Étude de la topologie par l'algèbre "

II. THÉORIE DES TYPES HOMOTOPIQUES (HOTT)

THÉORIE DES TYPES

AGDA CUBIQUE

III. CORRESPONDANCE DE GALOIS

PULLBACKS

DELOOPINGS

Samuel Mimram et Émile Oleon

"Classifying Covering Types in Homotopy Type Theory"

Hugo Salou ⟶ preuve formelle en Agda Cubical

Partie 1.

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

CHEMIN

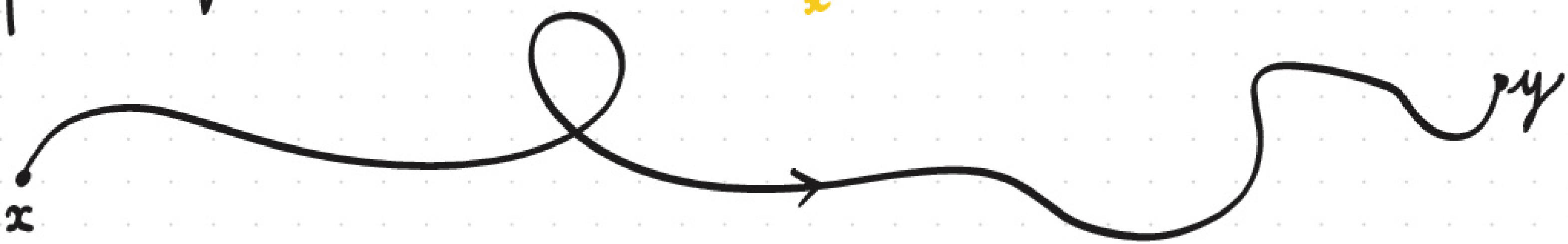
$p : [0,1] \to X$

telle que

$p(0) = x$

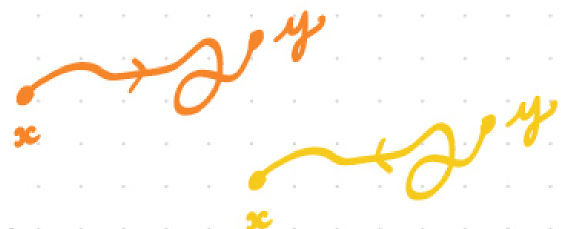
$p(1) = y$

$p : x \rightsquigarrow y$



Concaténation

Inversion



Chemin ~~nul~~ constant :

ATTENTION !

$$p \cdot (q \cdot r) \neq (p \cdot q) \cdot r$$

$$p \cdot p^{-1} \neq \mathrm{refl}$$

$$p \cdot \mathrm{refl} \neq p$$

Homotopie de chemins

$$h : [0,1]^2 \longrightarrow X$$

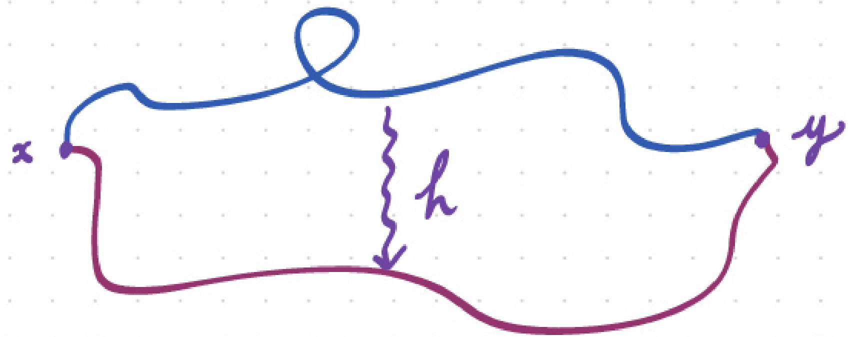
telle que

$$h(0,-) = p \qquad h(1,-) = q$$

$$\boxed{h(t,0) = x \qquad h(t,1) = y}$$

L'ÉGALITÉ "STRICTE" EST TROP CONTRAIGNANTE.

$\rightsquigarrow$ DÉFORMATION LISSE

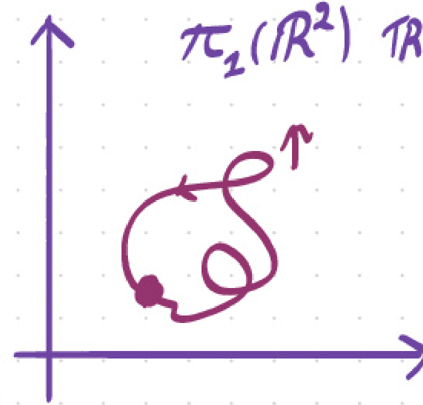


$\Omega(X,x) := \{\text{BOUCLE EN } x\}$

$\boxed{\pi_1(X,x) := \Omega(X,x) \big/ \text{HOMOTOPIE DE CHEMINS}}$

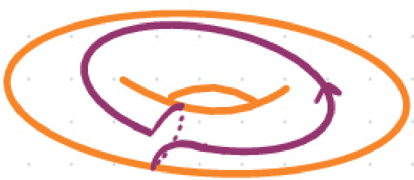
↳ GROUPE FONDAMENTAL

$\pi_1(\mathbb{R}^2)$ TRIVIAL

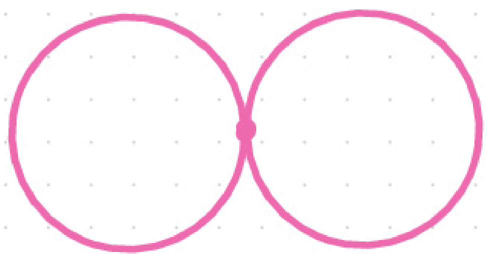


PRODUIT LIBRE

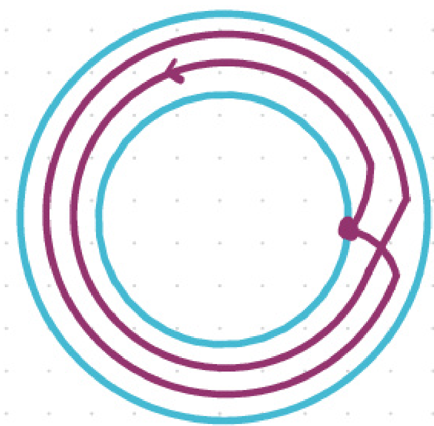
$\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

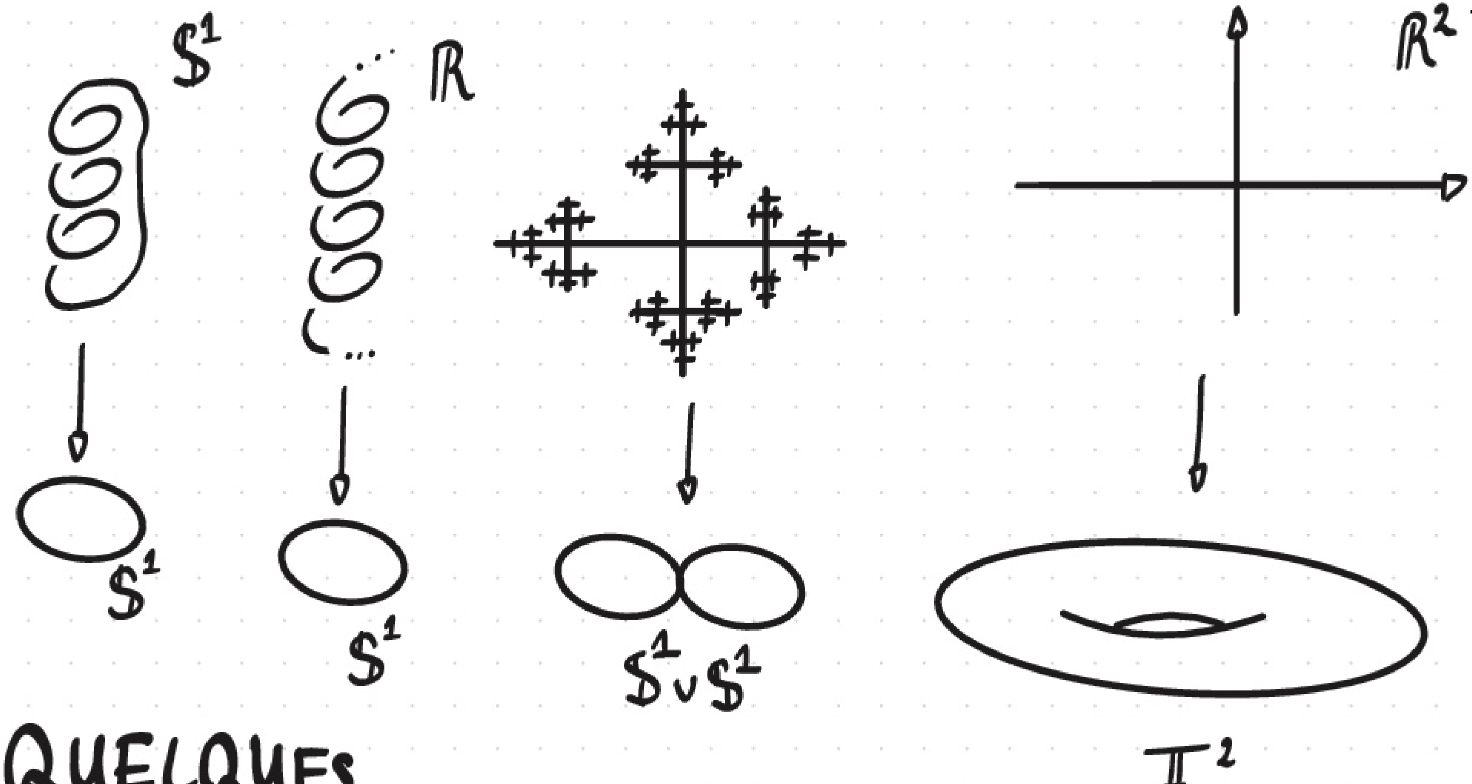


$\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$



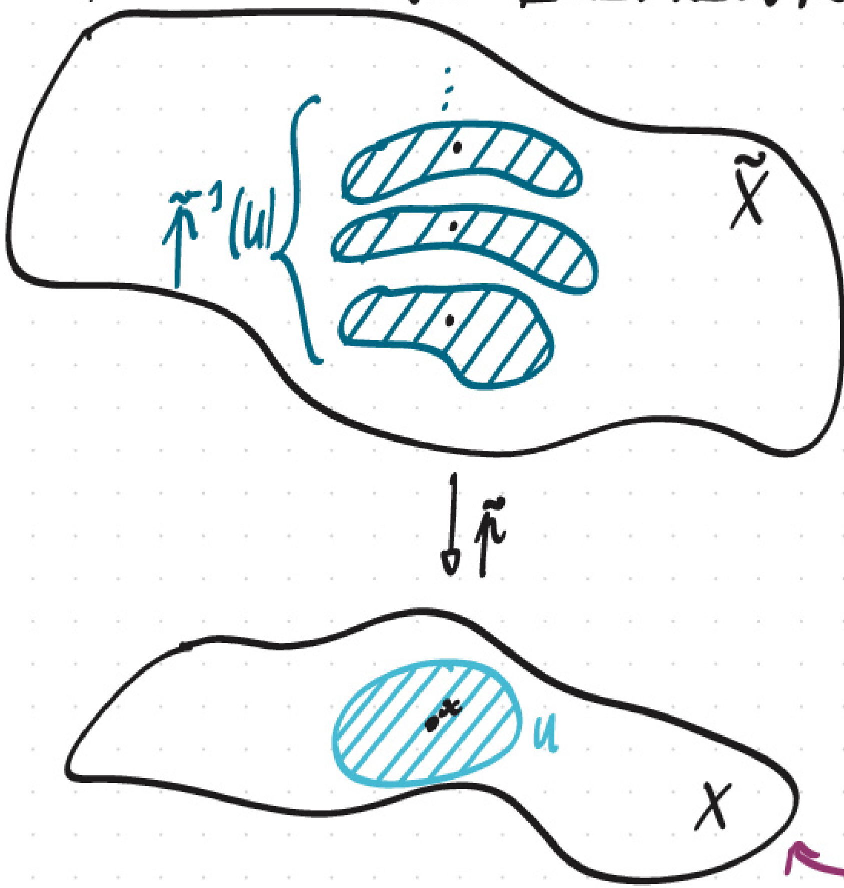
$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$





QUELQUES REVÊTEMENTS

REVÊTEMENTS



CONNEXE

TOUT POINT $x \in X$

A UN VOISINAGE U

TEL QUE

$$\tilde{\pi}^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

ET

$$V_i \xrightarrow{\tilde{\pi}} U$$

EST UN HOMÉOMORPHISME.

CORRESPONDANCE DE GALOIS.

REVÊTEMENTS CONNEXES POINTÉS DE (X, x) $\longleftrightarrow$ SOUS-GROUPES DE $\pi_1(X, x)$.

GÉOMÉTRIE — ALGÈBRE

Partie 2.

THÉORIE DES TYPES HOMOTOPIQUES

IMPORTANT !

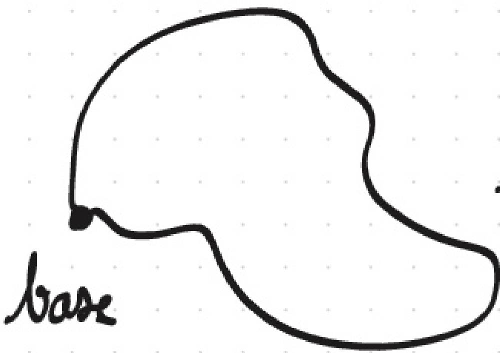
$\boxed{x =_A y}$ EST UN **TYPE**

En HoTT, c'est le type des **chemins** de x à y

et $\boxed{p =_{x =_A y} q}$ est le type des **homotopies** de p à q.

et etc...

LE CERCLE $\mathbb{S}^1$



$\mathsf{base} : \mathbb{S}^1$

$\mathsf{loop} : \mathsf{base} =_{\mathbb{S}^1} \mathsf{base}$

DÉFINITION

"higher inductive type"

Quelques autres types

$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{2}$	$\mathbb{N}$
	tt	true, false	0, 1, 2, 3, …

n-TYPES.

(-1)-Type
Proposition

$$\prod_{x,y:A} x =_A y$$

0-type
Set

$$\prod_{x,y:A}\ \prod_{p,q:x=y} p = q$$

1-type
Groupoid

$$\prod_{x,y:A}\ \prod_{p,q:x=y}\ \prod_{r,s:p=q} r = s$$

ETC ...

→ DISCRET

$\mathbb{0}$ $\mathbb{1}$ $\mathbb{N}$ S^1

DANS UN SET, $x = y$ EST UNE PROP°

DANS UN GROUPOID, $x = y$ EST UN SET.

n-TRONCATION

$$\boxed{\begin{matrix}\text{TYPE}\\ A\end{matrix}} \underset{\text{Univ}}{\overset{\|-\|_n}{\rightsquigarrow}} \boxed{\begin{matrix}n\text{-TYPE}\\ \|A\|_n\end{matrix}}$$

<u>INTRO</u>

$$|-|_n : A \to \|A\|_n$$

<u>MAP</u>

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "|-|_n"] \arrow[d, "f"'] & \|A\|_n \arrow[d, "\|f\|_n"] \\
B \arrow[r, "|-|_n"'] & \|B\|_n
\end{tikzcd}$$

$$\|f\|_n(|x|_n) \equiv |f(x)|_n$$

Partie 3.

CORRESPONDANCE DE GALOIS

Correspondance de Galois

$$\mathrm{Covering}(X, x) \cong \mathrm{SubGroup}(\pi_1(X, x))$$

Équivalence
de types

PULLBACKS homotopiques

$$
\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

TYPE DES TRIPLETS

- $a : A$
- $b : B$
- $p : f(a) =_C g(b)$

FIBRES homotopiques

TYPE DES COUPLES

- $a : A$
- $f(a) =_B b$

"PRÉIMAGE"

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{fib}_f(b) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\mathrm{pick}_b"'] & B
\end{tikzcd}
$$

DELOOPINGS

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\text{(1-) TYPE POINTÉ (CONNEXE)} \arrow[r, "\pi_1"] & \text{GROUPE} \arrow[l, bend left=40, "B\ ?"]
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\pi_1(BG) = G}$$

Et B est FONCTORIEL

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly, "B"'] & H \arrow[d, squiggly, "B"] \\
BG \arrow[r, "Bf"] & BH
\end{tikzcd}$$

SOUS-GROUPES *et deloopings*

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[d, squiggly, "B"] & \pi_1(X,x) \\
BG \arrow[r, "Bi"'] & B\pi_1(X,x)
\end{tikzcd}
$$

DEUX RÉSULTATS

1) $\|X,x\|_1$ est un $B\pi_1(X,x)$
QUAND X EST CONNEXE

2) $i : G \to H$ injectif ssi
$\forall h : BH$, $\mathrm{fib}_{Bi}(h)$ est un SET

SOUS-GROUPE → RÊVETEMENT

"REVÊTEMENT UNIVERSEL" $=$

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{X}_g \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\mathrm{pick}_g"] \\
F_u \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{p}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & BG \arrow[d, "Bi"] \\
1 \arrow[r, "\mathrm{pick}_u"'] & X \arrow[r, "|-|_1"'] & \|X\|_1
\end{tikzcd}$$

1) $\tilde{X}$ est CONNEXE

$$\tilde{X} \simeq \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ g : BG \\ \bullet\ \overline{\overline{x}} : \overline{X}_g \end{array}}$$

PAIRES

CONNEXE

2) $fib_{\tilde{p}}(-)$ sont des SETs

$$fib_{\tilde{p}}(u) = F_u = fib_{Bi}(|u|_1)$$

REVÊTEMENT ⟶ SOUS-GROUPE

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "|-|_1"] \arrow[d, shift right] & \|\tilde{X}\|_1 = B\pi_1(\tilde{X}) \arrow[d, "\|\tilde{p}\|_1"] \\ X \arrow[u, shift right, "\tilde{p}"'] \arrow[r, "|-|_1"'] & \|X\|_1 = B\pi_1(X) \end{tikzcd}$$

1) $\|\tilde{X}\|_1$ CONNEXE ✓

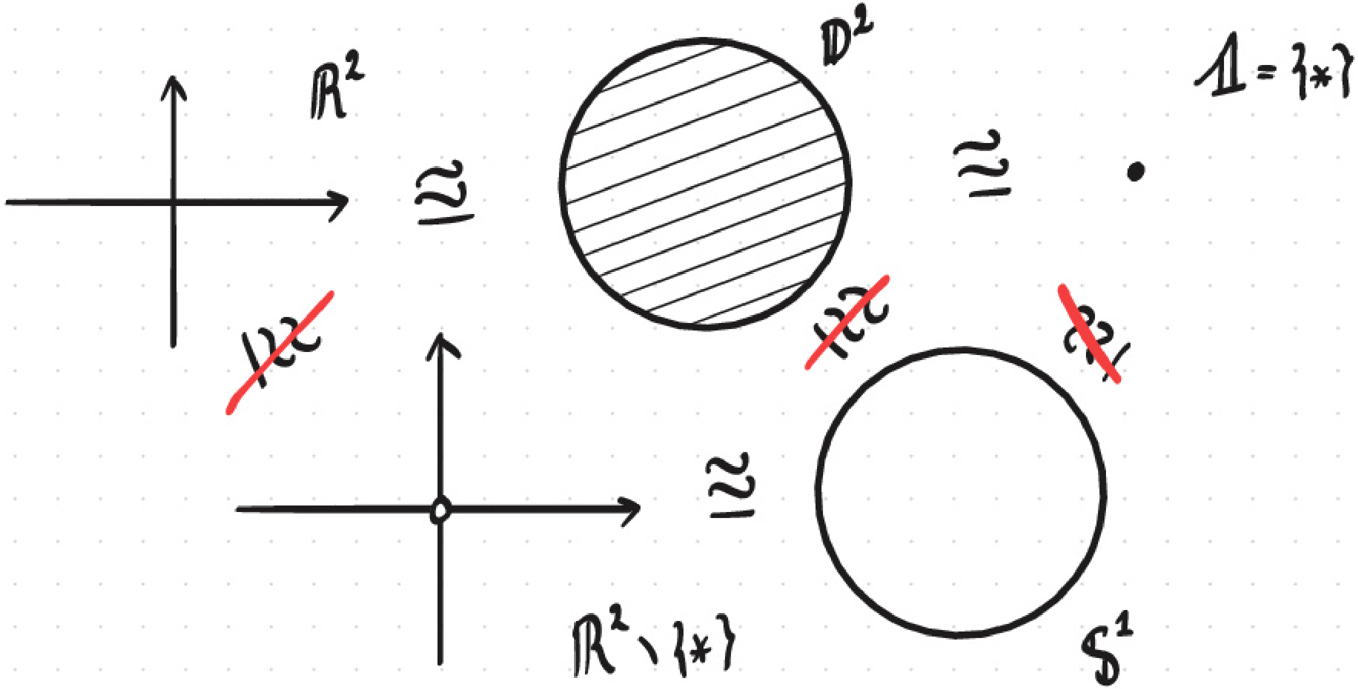
2) $\mathrm{fib}_{\|\tilde{p}\|_1}(-)$ sont des SET

↳ $\forall u : X,\ \mathrm{fib}_{\|\tilde{p}\|_1}(|u|_1) = \mathrm{fib}_{\tilde{p}}(u)$

CONCLUSION

ANNEXES

ÉQUIVALENCE HOMOTOPIQUE : " À DÉFORMATION PRÈS "



Homéomorphisme

$f : X \longrightarrow Y$

$g : Y \longrightarrow X$

$f \circ g = id$

$g \circ f = id$

↳ TROP CONTRAIGNANT

Équivalence homotopique

$f : X \longrightarrow Y$

$g : Y \longrightarrow X$

$f \circ g \simeq id$

$g \circ f \simeq id$

HOMOTOPIE DE FONCTIONS

"Chemin dans $X \longrightarrow X$"

Homotopie de fonctions

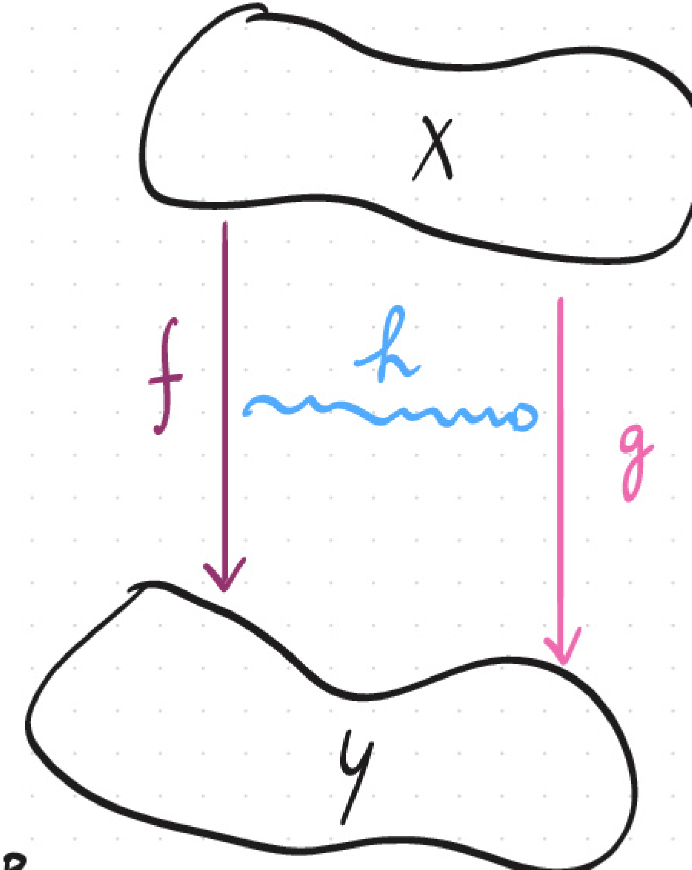
$$h : \mathbb{I} \times X \to Y$$

telle que

$$h(0,-) = f$$
$$h(1,-) = g$$

↳ "chemin" $f \rightsquigarrow g$

dans l'espace $A \to B$



FONCTORIALITÉ

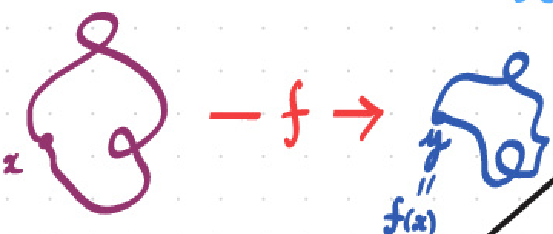
SI $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$

↳ fonction continue

ALORS

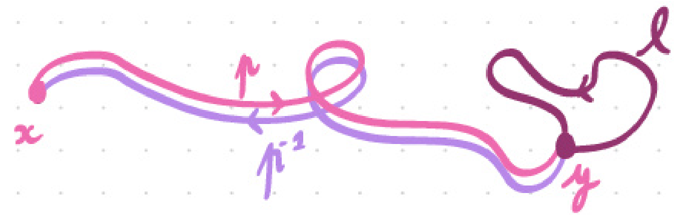
$\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$

↳ homomorphisme de groupes



POINT DE BASE

SI $p : x \rightsquigarrow y$ ALORS $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$.



INVARIANT

SI $(X, x) \simeq (Y, y)$

ALORS $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, y)$

MORPHISMES DE REVÊTEMENTS

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde{p}"'] & & \bar{X} \arrow[dl, "\bar{p}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

CATÉGORIE

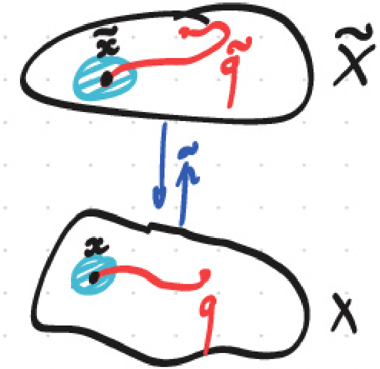
$\mathcal{C}ov(X)$

RELÊVEMENTS

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

LEMME I

Si $\tilde{f}(x) = \tilde{f}'(x)$ pour <u>un</u> $x \in A$ alors $\tilde{f} = \tilde{f}'$.



LEMME II

1) Avec $q : x \rightsquigarrow y$, on a $\tilde{q} : \tilde{x} \rightsquigarrow \tilde{y}$ tel que $\tilde{p}(\tilde{x}) = x$.

2) Si $q \simeq_p r$ alors $\tilde{q} \simeq_p \tilde{r}$.

THÉORIE DES TYPES DÉPENDANTS

$a : A$

élément   type

$f : \prod_{x:A} B(x)$ IMPLIQUE $f(x) : \underline{\underline{B(x)}}$ pour $x : A$

La fonction DÉPENDANTE

$\langle a, b \rangle : \sum_{x:A} B(x)$ IMPLIQUE $a : A$ ET $b : \underline{\underline{B(a)}}$.

Le couple DÉPENDANT

GROUPE FONDAMENTAL

$\Omega(X,x) :\equiv (x =_X x)$

$\pi_1(X,x) :\equiv \|\Omega(X,x)\|_0$

↳ c'est un Set !

ÊTRE CONNEXE

$\prod_{x,y:A} x = y$

Ouch !

$\prod_{x,y:A} \|x = y\|_{-1}$

↳ TRONCATION PROPOSITIONNELLE

CHEMINS DANS $\|-\|_n$

$$(|x|_n =_{\|A\|_n} |y|_n) \simeq \|x = y\|_{n-1}$$

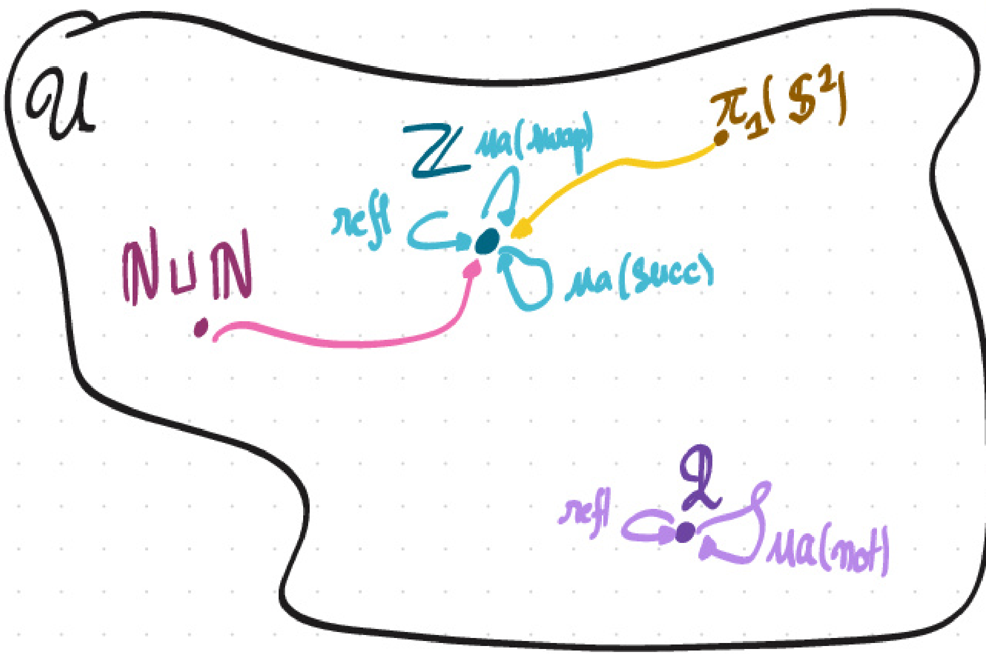
AXIOME D'UNIVALENCE

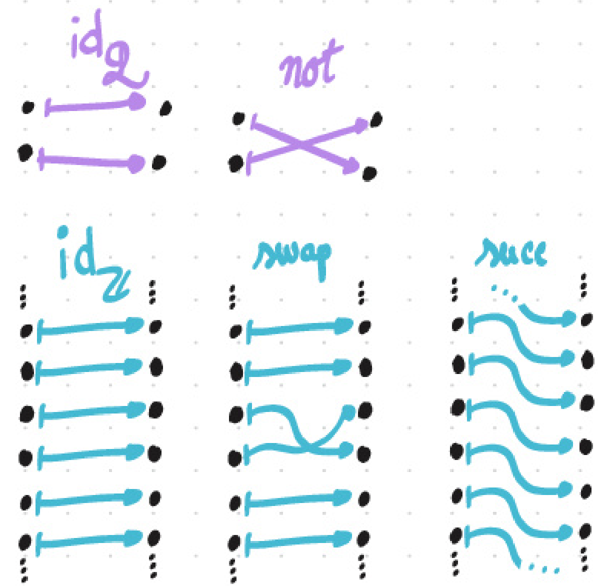
$$(A \simeq B) \simeq (A =_{\mathcal{U}} B)$$

TYPES ÉQUIVALENTS

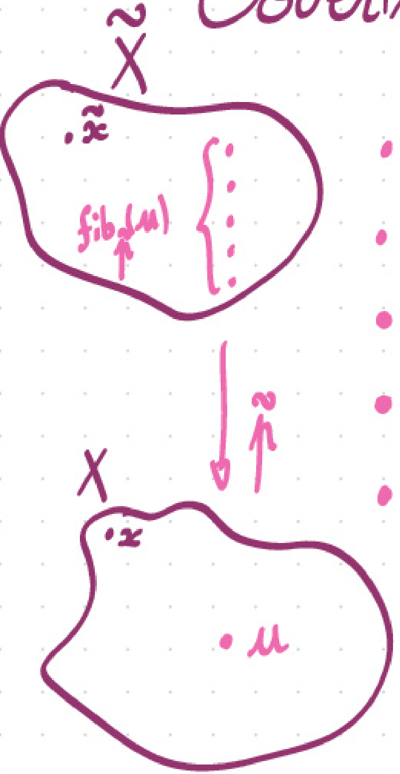
$ua : A \simeq B \to A = B$

CHEMIN ENTRE EUX





CORRESPONDANCE DE GALOIS



Covering(X, x)

- $\tilde{X}$ type
- $\tilde{p} : \tilde{X} \to X$
- $\tilde{x} : \tilde{X}$
- $\tilde{p}(\tilde{x}) = x$
- $\forall u : X,\ fib_{\tilde{p}}(u)$ est un SET
- $\tilde{X}$ est CONNEXE

$$\simeq$$

SubGroup$(\pi_1(X, x))$

- BG type
- $Bi : BG \to \|X\|_1$
- $* : BG$
- BG est un GROUPOID
- BG est CONNEXE
- $Bi(*) = |x|_1$
- $\forall u : \|X\|_1,\ fib_{Bi}(u)$ est un SET.