

# Le $\lambda$ -calcul pur.

Le  $\lambda$ -calcul a trois domaines proches :

- ▷ la *calculabilité*, avec l'équivalence entre machines de Turing et  $\lambda$ -expression (vue en FDI) ;
- ▷ la *programmation fonctionnelle* (vue en **Théorie de la Programmation** [Chapitre 6] avec le petit langage FUN) ;
- ▷ la *théorie de la démonstration* (vue dans la suite de ce cours).

On se donne un ensemble infini  $\mathcal{V}$  de variables notées  $x, y, z, \dots$ . Les *termes* (du  $\lambda$ -calcul) ou  $\lambda$ -termes sont définis par la grammaire

$$M, N, \dots ::= \lambda x. M \mid M N \mid x.$$

La construction  $\lambda x. M$  s'appelle l' *abstraction* ou  $\lambda$ -*abstraction*. Elle était notée `fun  $x \rightarrow M$`  en cours de théorie de la programmation.

**Notation.**   ▷ On notera  $M N P$  pour  $(M N) P$ .

- ▷ On notera  $\lambda xyz. M$  pour  $\lambda x. \lambda y. \lambda z. M$  (il n'y a pas lieu de mettre des parenthèses ici, vu qu'il n'y a pas d'ambiguïtés).
- ▷ On notera  $\lambda x. M N$  pour  $\lambda x. (M N)$ . **Attention**, c'est différent de  $(\lambda x. M) N$ .

## 1 Liaison et $\alpha$ -conversion.

**Remarque 1 (Liaison).** Le «  $\lambda$  » est un lieu. Dans  $\lambda y. x y$ , la variable  $y$  est *liée* mais pas  $x$  (la variable  $x$  libre). On note  $\mathcal{V}\ell(M)$  l'ensemble des variables libres de  $M$ , définie par induction sur  $M$  (il y a 3 cas).

**Remarque 2** ( $\alpha$ -conversion).

On note  $=_\alpha$  la relation d' $\alpha$ -conversion. C'est une relation binaire sur les  $\lambda$ -termes fondée sur l'idée de renommage des abstractions *en évitant la capture de variables libres* :

$$\lambda x. x y =_\alpha \lambda t. x t \neq_\alpha \lambda x. x x.$$

Ainsi  $\lambda x. M =_\alpha \lambda z. M'$  où  $M'$  est obtenu en remplaçant  $x$  par  $z$  *là où il apparaît libre* et *à condition que  $z \notin \mathcal{V}\ell(M)$* . Ceci, on peut le faire partout.

**Lemme 1.** La relation  $=_\alpha$  est une relation d'équivalence. Si  $M =_\alpha N$  alors  $\mathcal{V}\ell(M) = \mathcal{V}\ell(N)$ .

Par convention, on peut identifier les termes modulo  $=_\alpha$ . On pourra donc toujours dire

« considérons  $\lambda x. M$  où  $x \notin E [\dots]$  »

avec  $E$  un ensemble *fini* de variables.

Ceci veut dire qu'on notera

$$M = N \text{ pour signifier que } M =_\alpha N.$$

## 2 La $\beta$ -réduction.

**Définition 1** ( $\beta$ -réduction). On définit la relation de  $\beta$ -réduction sur les  $\lambda$ -termes, notée  $\rightarrow_\beta$  ou  $\rightarrow$ , définie par les règles d'inférences :

$$\frac{}{(\lambda x. M) N \rightarrow_\beta M[N/x]} \quad \frac{M \rightarrow_\beta M'}{\lambda x. M \rightarrow_\beta \lambda x. M'} \quad \frac{N \rightarrow_\beta N'}{\lambda x. M \rightarrow_\beta \lambda x. M'}$$

$$\frac{M \rightarrow_\beta M'}{M N \rightarrow_\beta M' N} \quad \frac{N \rightarrow_\beta N'}{M N \rightarrow_\beta M N'}$$

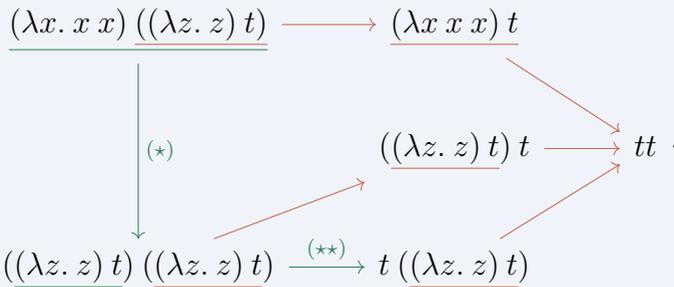
où  $M^{[N/x]}$  est la substitution de  $x$  par  $N$  dans  $M$  (on le définit ci-après).

**Définition 2.** Un terme de la forme  $(\lambda x. M) N$  est appelé un *redex* (pour *reducible expression*) ou  $\beta$ -redex. Un terme  $M$  est une *forme normale* s'il n'existe pas de  $N$  tel que  $M \rightarrow_{\beta} N$ .

**Remarque 3.** La relation  $\rightarrow_{\beta}$  n'est pas terminante :

$$\Omega := (\lambda x. x x) (\lambda y. y y) \rightarrow_{\beta} (\lambda y. y y) (\lambda y. y y) =_{\alpha} \Omega.$$

**Exemple 1.**



Un pas de  $\beta$ -réduction peut :

- ▷ dupliquer un terme (c.f.  $(\star)$ );
- ▷ laisser un redex inchangé (c.f.  $(\star\star)$ );
- ▷ faire disparaître un redex (qui n'est pas celui que l'on contracte) :

$$(\lambda x. u)((\lambda z. z) t) \rightarrow_{\beta} u ;$$

- ▷ créer de nouveaux redex :

$$(\lambda x. x y) (\lambda z. z) \rightarrow_{\beta} (\lambda z. z) y.$$

### 3 Substitutions.

**Exemple 2.** Le terme  $\lambda xy. x$  c'est une « fonction fabriquant des fonctions constantes » au sens où

$$(\lambda xy. x)M \rightarrow_{\beta} \lambda y. M,$$

à condition que  $y \notin \mathcal{V}\ell(M)$ . On doit cependant  $\alpha$ -renommer pour éviter la capture :

$$\begin{array}{c} (\lambda xy.x) (\lambda t. y) \not\rightarrow_{\beta} \lambda y. (\lambda t. y) \\ \parallel \\ (\lambda xy'.x) (\lambda t. y) \rightarrow_{\beta} \lambda y'. (\lambda t. y). \end{array}$$

**Définition 3.** On procède par induction, il y a trois cas :

- ▷  $y^{[N/x]} := \begin{cases} N & \text{si } y = x \\ y & \text{si } y \neq x \end{cases}$
- ▷  $(M_1 M_2)^{[N/x]} := (M_1^{[N/x]})(M_2^{[N/x]})$
- ▷  $(\lambda y. M)^{[N/x]} := \lambda y. (M^{[N/x]})$  **à condition que**  $y \notin \mathcal{V}\ell(N)$  **et**  $y \neq x$ .

**Lemme 2** (Gymnastique des substitutions). Pour  $y \notin \mathcal{V}\ell(R)$ ,

$$(P[Q/y])[R/x] = (P[R/x])[Q^{[R/x]}/y].$$

**Lemme 3.** Si  $M \rightarrow_{\beta} M'$  alors  $\mathcal{V}\ell(M') \subseteq \mathcal{V}\ell(M)$ .

## 4 Comparaison $\lambda$ -calcul et FUN.

En  $\lambda$ -calcul, on a une règle

$$\frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{\lambda x. M \rightarrow_{\beta} \lambda x. M'}.$$

Cette règle n'existe pas en FUN (ni en **fouine**) car on traite les fonctions comme des valeurs. Et, en FUN, les trois règles suivantes sont

mutuellement exclusives :

$$\frac{}{(\lambda x. M) N \rightarrow_{\beta} M[N/x]} \quad \frac{M \rightarrow_{\beta} M'}{M N \rightarrow_{\beta} M' N} \quad \frac{N \rightarrow_{\beta} N'}{M N \rightarrow_{\beta} M N'}$$

car on attend que  $N$  soit une **valeur** avant de substituer.

En FUN (comme en **fouine**), pour l'exemple 1, on se limite à n'utiliser que les flèches rouges.

La relation  $\rightarrow_{\beta}$  est donc « plus riche » que  $\rightarrow_{\text{FUN}}$ . En FUN, on a une *stratégie de réduction* : on a au plus un redex qui peut être contracté. On n'a pas de notion de valeur en  $\lambda$ -calcul pur. Le « *résultat d'un calcul* » est une forme normale.

## 5 Exercice : les booléens.

On définit

$$\mathbf{T} := \lambda xy. x \quad \mathbf{F} := \lambda xy. y.$$

Ainsi, pour tout  $M$  (si  $y \notin \mathcal{V}^{\ell}(M)$ ),

$$\mathbf{T} M \rightarrow \lambda y. M \quad \mathbf{F} M \rightarrow \lambda y. y =: \mathbf{I}.$$

La construction **if**  $b$  **then**  $M$  **else**  $N$  se traduit en  $b M N$ .

Le « non » booléen peut se définir par :

- ▷ **not** :=  $\lambda b. b \mathbf{F} \mathbf{T} = \lambda b. b (\lambda xy. y) (\lambda tu. t)$  ;
- ▷ **not'** :=  $\lambda b. \lambda xy. byx$ .

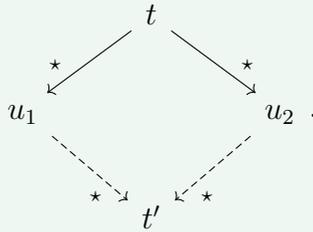
La première version est plus abstraite, la seconde est « plus électricien ». On a deux formes normales **différentes**.

De même, on peut définir le « et » booléen :

- ▷ **and** :=  $\lambda b_1. \lambda b_2. b_1 (b_2 \mathbf{T} \mathbf{F}) \mathbf{F}$  ;
- ▷ **and'** :=  $\lambda b_1. \lambda b_2. \lambda xy. b_1 (b_2 x y) y$ .

## 6 Confluence de la $\beta$ -réduction.

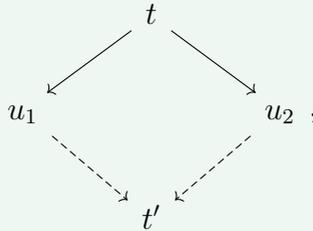
**Définition 4** (Rappel, c.f. **Théorie de la Programmation [Chapitre 10]**). On dit que  $\rightarrow$  est *confluente* en  $t \in A$  si, dès que  $t \rightarrow^* u_1$  et  $t \rightarrow^* u_2$  il existe  $t'$  tel que  $u_1 \rightarrow^* t'$  et  $u_2 \rightarrow^* t'$ .



Les flèches en pointillés représentent l'existence.

On dit que  $\rightarrow$  est *confluente* si  $\rightarrow$  est confluente en tout  $a \in A$ .

La propriété du diamant correspond au diagramme ci-dessous :



c'est-à-dire si  $t \rightarrow u_1$  et  $t \rightarrow u_2$  alors il existe  $t'$  tel que  $u_1 \rightarrow t'$  et  $u_2 \rightarrow t'$ .

La confluence pour  $\rightarrow$ , c'est la propriété du diamant pour  $\rightarrow^*$ . On sait déjà que la  $\beta$ -réduction n'a pas la propriété du diamant (certains chemins de l'exécution sont plus longs), mais on va montrer qu'elle est confluente.

**Définition 5.** On définit la relation de *réduction parallèle*, notée  $\Rightarrow$ , par les règles d'inférences suivantes :

$$\frac{\frac{x \Rightarrow x}{M \Rightarrow M'} \quad N \Rightarrow N'}{M N \Rightarrow M' N'} \quad \frac{M \Rightarrow M' \quad \lambda x. M \Rightarrow \lambda x. M'}{(\lambda x. M) N \Rightarrow M'[N'/x]}$$

**Lemme 4.** La relation  $\Rightarrow$  est réflexive.

**Lemme 5.** Si  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$  alors  $\mathcal{R}^* \subseteq \mathcal{S}^*$ . De plus,  $(\mathcal{R}^*)^* = \mathcal{R}^*$ .

**Lemme 6.** Les relations  $\rightarrow^*$  et  $\Rightarrow^*$  coïncident.

**Preuve.**  $\triangleright$  On a  $\rightarrow^* \subseteq \Rightarrow^*$  car cela découle de  $\rightarrow \subseteq \Rightarrow$  par induction sur  $\rightarrow$  en utilisant la réflexivité de  $\Rightarrow$ .

- $\triangleright$  On a  $\Rightarrow^* \subseteq \rightarrow^*$  car cela découle de  $\Rightarrow \subseteq \rightarrow^*$ . En effet, on montre que pour tout  $M, M'$  si  $M \Rightarrow M'$  alors  $M \rightarrow^* M'$ , par induction sur  $\Rightarrow$ . Il y a 4 cas.
- Pour  $x \Rightarrow x$ , c'est immédiat.
  - Pour l'abstraction, on suppose  $M \Rightarrow M'$  alors par induction  $M \rightarrow^* M'$ , et donc  $\lambda x. M \rightarrow^* \lambda x. M'$  par induction sur  $M \rightarrow^* M'$ .
  - Pour l'application, c'est plus simple que pour la précédente.
  - Pour la substitution, supposons  $M \Rightarrow M'$  et  $N \Rightarrow N'$ . On déduit par hypothèse d'induction  $M \rightarrow^* M'$  et  $N \rightarrow^* N'$ . Et, par induction sur  $M \rightarrow^* M'$ , on peut montrer que  $(\lambda x. M) N \rightarrow^* (\lambda x. M') N$ . Puis, par induction sur  $N \rightarrow^* N'$ , on montre  $(\lambda x. M') N \rightarrow^* (\lambda x. M') N'$ . Enfin, par la règle de  $\beta$ -réduction, on a  $(\lambda x. M') N' \rightarrow M'[N'/x]$ . On rassemble tout pour

obtenir :

$$(\lambda x. M) N \rightarrow^* M'[N'/x].$$

□

On est donc ramené à montrer que  $\Rightarrow^*$  a la propriété du diamant. Or  $\Rightarrow$  a la propriété du diamant, ce que l'on va montrer en TD.

**Lemme 7.** Si  $M \Rightarrow M'$  alors  $N \Rightarrow N'$  implique  $M[N/x] \Rightarrow M'[N'/x]$ .

**Preuve.** Par induction sur  $M \Rightarrow M'$ , il y a 4 cas. On ne traite que le cas de la 4ème règle. On suppose donc  $M = (\lambda y. P) Q$  avec  $y \notin \mathcal{V}\ell(N)$  et  $y \neq x$ . On suppose aussi  $P \Rightarrow P'$ ,  $Q \Rightarrow Q'$  et  $M' = P'[Q'/y]$ . On suppose de plus  $N \Rightarrow N'$ . Par hypothèse d'induction, on a  $P[N/x] \Rightarrow P'[N'/x]$  et  $Q[N/x] \Rightarrow Q'[N'/x]$ . On applique la 4ème règle d'inférence définissant  $\Rightarrow$  pour déduire

$$\underbrace{(\lambda y. (P[N/x]))(Q[N/x])}_{\parallel} \Rightarrow (P'[N'/x])[Q'[N'/x]/y] = (P'[Q'/y])[N'/x]$$

$$(\lambda y. P)[N/x]$$

car  $x \neq y$

par le lemme de gymnastique des substitutions et car  $y \notin \mathcal{V}\ell(N') \subseteq \mathcal{V}\ell(N)$  et car  $N \rightarrow^* N'$ . □

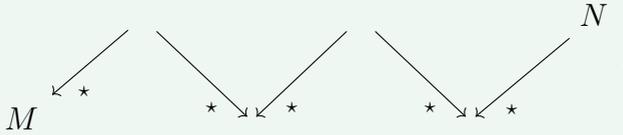
**Proposition 1.** La relation  $\Rightarrow$  a la propriété du diamant.

**Preuve.** Vu en TD. □

**Corollaire 1.** On a la confluence de  $\rightarrow_\beta$ .

**Définition 6.** La  $\beta$ -équivalence, ou  $\beta$ -convertibilité est la plus petite relation d'équivalence contenant  $\rightarrow_\beta$ . On la note  $=_\beta$ .

Si l'on a



alors  $M =_{\beta} N$ .

**Proposition 2.** Tout  $\lambda$ -terme est  $\beta$ -équivalent à au plus une forme normale.

**Preuve.** Si  $M =_{\beta} N$  et  $M, N$  sont des formes normales, alors par confluence il existe  $P$  tel que  $M \rightarrow^* P$  et  $N \rightarrow^* P$ . On a donc que  $M = N = P$ .  $\square$

**Remarque 4 (Conséquences).**  $\triangleright$  Deux normales distinctes (au sens de  $=_{\alpha}$ ) ne sont pas  $\beta$ -convertibles.

- $\triangleright$  Si on a un  $\lambda$ -terme qui diverge et qui a une forme normale, par exemple  $(\lambda x. y) \Omega$ , alors on peut toujours « revenir » sur la forme normale.