

Révisions de Probabilités.

Fonction de répartition:

$$F_x(t) := P(X \leq t)$$

Théorème: $X \sim Y \iff F_x = F_y$

↳ croissante

↳ continue à droite

$$\lim_{-\infty} F_x = 0$$

$$\lim_{+\infty} F_x = 1$$

$E[-]$ linéaire

et

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] \quad \underline{\text{si}} \quad X \perp\!\!\!\perp Y$$

Boîte de l'union:

$$P(\cup B_i) \leq \sum P(B_i)$$

Formule de transfert (cas continu)

$$E[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_x(x) dx.$$

Moments & déviations

• Markov: $P(X \geq a) \leq E[X]/a$

• Tchebychev: $P(|X - E[X]| \geq a) \leq \text{Var}[X]/a^2$

• loi faible des grands nombres:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E[X_i]\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}[X_i]}{n \varepsilon^2}$$

$\xrightarrow{\text{p.s.}} E[X_i]$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= E[(X - E[X])^2] \end{aligned}$$

$$\sigma[X] = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

$$\text{Cov}[X; Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

↳ 0 si $X \perp\!\!\!\perp Y$.

• Chernoff, formule rappelée

• Théorème central limite

$$\left(\frac{S_n - \mu_n}{\sqrt{V_n}}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\text{Var}[X+Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X; Y]$$

Convergence:

• $X_n \xrightarrow{P} X$ "en probabilité" ssi $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

• $X_n \xrightarrow{d} X$ "en loi/distribution" ssi $\forall t, F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(t)$ whenever F is \mathcal{C}^0 at t

• $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ "presque sûrement" ssi $P(\lim X_n = X) = 1$
ssi $\forall \varepsilon > 0, P(\exists \text{ une suite d'indices } \dots) = 0$

Graphes aléatoires

$G_{n,p}$: on ajoute $e = x-y$ avec probab p

Arbres: $P(N=0) \leq P(|N - E[N]| \leq E[N])$
puis Tchebychev

Borel-Cantelli

Si $\sum_n P(A_n)$ converge alors $P(\text{une suite des } A_i) = 0$.

$$E[X] = \sum E[\mathbb{1}_A]$$