Logique **TD n° 5** Hugo SALOU

Exercice 1. Théorie des graphes.

Q1. pas de boucles : $\forall x \quad \neg R(x,x)$

non-orienté : $\forall x \, \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x)$.

(l'implication simple suffit).

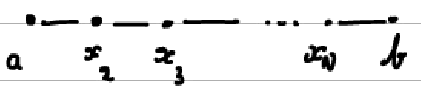
D'où $\mathrm{Th}(\text{Graphes non-orientés simples}) = \{ \forall x \quad \neg R(x,x),$
$\forall x \forall y \quad R(x,y) \longleftrightarrow R(y,x) \}$.

Q2. On pose $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ qui est une théorie sur $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$.

Q3. $\varphi_n = \overbrace{\forall x_1 \cdots \forall x_{n-1}}^{\text{pour } n \text{ fixé}} \neg (R(a, x_1) \wedge R(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1}, b))$

Q4. Oui. On considère $G = (V, E)$ décrit ci-dessous.

Soit $N = \max\{n_1, \dots, n_k\} + 1$.



Il est connexe, simple, non-orienté et non-vide.

Et, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il n'y a pas de chemins de long° n_k entre a et b dans G.

Q5. Soit $\mathcal{T} \supseteq A$ une théorie des graphes connexes.

On pose $\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Toute partie finie de $\mathcal{T}'$ est satisfiable.
Par compacité, on a que $\mathcal{T}$ est satisfiable. Absurde car seul un graphe vide satisfait $\mathcal{T}'$.

Exercice 2. Langage sans fonction.

Q.1. Par récurrence sur n, montrons que :

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_k \ A[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$$

est un théorème ssi elle est satisfaite dans toute interprétation de card° au plus $n+m$.

- Pour $n=0$, $\overbrace{\exists y_1 \cdots \exists y_k \ A[y_1, \dots, y_k]}^{\varphi}$ est un théorème ssi

$$\forall \mathcal{M} \text{ modèle}, \forall e, \quad \mathcal{M}, e \models \varphi$$

Si on a un modèle de card $> m$, on peut le décomposer en modèles de card $\leq k$ par dénombrement.
D'où l'équivalence.

-

Q.2. Dans $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_m, f, =\}$,

on considère $A =$ " $f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1) \wedge \neg(y_1 = y_2) \wedge \bigwedge_{i=3}^{k-1} (y_i = y_{i+1})$ ".

Dans le modèle

$$\mathcal{M} : \{0,1\}, \quad f_{\mathcal{M}} = \text{xor}, \quad c_i = 0$$

la formule A est fausse.

Exercice 3. Densité.

Q1. On a $(\mathbb{Q}, <)$ et $(\mathbb{R}, <)$ qui sont non-isomorphes.

Q2

Soit $\varphi := \forall x, \exists y \quad r(x,y)$.

Dans $(\mathbb{R}, <)$, la formule φ est vérifiée
Dans $([0,1], <)$ la formule φ ne l'est pas.

D'où T n'est pas complète.

Q3. Soit un modèle $\mathcal{M}$.

Soient $x, y \in |\mathcal{M}|$ tels que $x < y$ (par A_2).

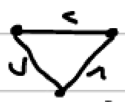
Construisons par récurrence des éléments de $\mathcal{M}$.

- on commence avec x, y
- par A_4, et comme $x < y$, il existe z tq $x < z < y$
- par A_4, ... $x < z$ .... w ..... $x < w < z$

Si $w \in \{x, y, z\}$, alors par A_2 et A_3 on a une absurdité.

D'où T n'admet pas de modèle fini.

Q4. T_1 : $(\{1\}, <)$
T_2 : $(\{1\}, \leq)$
T_3 :



T_4 $(\{0, 1\}, <)$

Exercice 4. Modèle infini.

On pose $\varphi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \; \neg(x_1 = x_2) \wedge \dots \wedge \neg(x_{k-1} = x_k)$.

Toute sous-théorie finie A de $T' := T \cup \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ a un modèle (de card $> \max\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi_k \in A\} \in \mathbb{N}$ avec $\max \emptyset = 0$).

Par compacité, T' admet un modèle. S'il est fini de cardinal k, absurde car $\varphi_k \in T'$. Il admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.

La théorie T admet donc un modèle infini $\mathcal{M}_\infty$.

TD n° 6

Exercice 1. Contortionnisme.

Q1.

$$Th(\text{Groupes abéliens sans torsion}) := \{ \forall x\ \exists y\ \ x+y = y+x = 0,\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ \ (x+y)+z = x+(y+z),\ \forall x\ \ x+0 = 0+x = x,\ \forall x\ \forall y\ \ x+y = y+x \} \cup \{ \forall x\ \neg(x=0) \to \neg(\underbrace{x+x+\dots+x}_{n}=0) \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

(où $(a=b=c) := a=b \wedge b=c$)

Q2. Supposons qu'il existe une théorie $\mathcal{T}$ des groupes abéliens avec torsion.

On considère :

$$\mathcal{T}' := \mathcal{T} \cup \{ \underbrace{\forall x\ \ x \neq 0 \to n \cdot x \neq 0}_{\varphi_n} \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

Toute partie finie $T \subseteq \mathcal{T}'$ est satisfiable.
En effet, soit $n = \max \{ n \in \mathbb{N}^* \mid \varphi_n \in T \} < +\infty$,
puis $G := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p > n$ et p premier.

Par compacité, $\mathcal{T}'$ est satisfiable.
Absurde car il existe $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \cdot x \neq 0$ et $x \neq 0$.

Q3. avec torsion $\neq$ sans torsion

Exercice 2. Formules closes.

On a : $T_{\mathcal{M}} = \{ F \in \mathcal{F} \mid \mathcal{M} \models F \}$

Soit $F \in \mathcal{F}$.

Si $\mathfrak{A} \models F$ alors $\dfrac{}{T_{\mathfrak{A}} \models F}\,ax$ car $F \in T_{\mathfrak{A}}$.

Si $\mathfrak{A} \not\models F$ alors $\mathfrak{A} \models \neg F$ et $\dfrac{}{T_{\mathfrak{A}} \vdash \neg F}\,ax$ car $\neg F \in T_{\mathfrak{A}}$.

De plus, si $T_{\mathfrak{A}} \vdash \bot$ alors, par correction, $\mathfrak{A} \models \bot$ absurde.
car $\mathfrak{A}$ modèle de $T_{\mathfrak{A}}$.

Exercice 3.

Q1 Pour $n=0$, on a : $P_0 \vdash S0 \neq 0$ par A_1.

Pour $n>0$, on a :

par hyp de récurrence

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A_3}\,ax}{\Gamma \vdash \forall y\; S^{n+1}0 = Sy \to S^n0 = y}\,\forall_e}{\Gamma \vdash S^{n+1}0 = S^n0 \to S^n0 = S^{n-1}0}\,\forall_e \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash S^{n+1}0 = S^n0}\,ax}{\Gamma := P_0, S^{n+1}0 = S^n0 \vdash S^n0 = S^{n-1}0}\,\to_e \qquad \dfrac{P_0 \vdash S^n0 \neq S^{n-1}0}{P_0, S^{n+1}0 = S^n0 \vdash S^n0 \neq S^{n-1}0}\,aff}{\dfrac{P_0, S^{n+1}0 = S^n0 \vdash \bot}{P_0 \vdash S^{n+1}0 \neq S^n0}}\,\neg e \qquad (*)$$

Q2. $PA \vdash \forall x \quad Sx \neq 0$.

On a :

- $P_0 \vdash S0 \neq 0$
- et :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A_4}\,ax}{\Gamma \vdash S^2x = Sx \to Sx = x}\,\forall e \times 2 \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash S^2x = Sx}\,ax}{\Gamma \vdash Sx = x}\,\to e \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash Sx \neq x}\,ax}{\Gamma := PA, Sx \neq x, S^2x = Sx \vdash \bot}\,\neg e}{\dfrac{PA, Sx \neq x \vdash S^2x \neq Sx}{PA \vdash Sx \neq x \to S^2x \neq Sx}\,\to i}\,\neg i$$

D'où, par schéma inductif, on a $\forall x,\ Sx \neq x$.

Q3. On pose $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ où $S\omega := \omega$ avec $\omega \times 0 := 0$.

$\omega \times x := \omega$

$\omega + x := \omega$

(& commutativité)

$(A_1) - (A_5)$ pas de pb avec ω

(A_6) ok par déf.

(A_7) $\quad 0 \times \underbrace{S\omega}_{\omega} = (0 \times \omega) + 0 = 0$

$$\omega \times (Sy) = \underbrace{(\omega \times y)}_{= 0 \text{ ou } \omega} + \omega = \omega$$

D'où $\overline{\mathbb{N}} \models P_0$ et $\overline{\mathbb{N}} \not\models \forall x\ Sx \neq x$ car $S\omega = \omega$.

Exercice 4.

Q1. On applique le théorème de Löwenheim-Skolem pour obtenir un modèle de card $> \aleph_0$.

Q2. Soit, par l'absurde, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ un $\mathcal{L}$-isomorphisme.

$\varphi(0) = (0,0)$

$\varphi(1) = \varphi(S_{\mathbb{N}} 0) = S_{\mathcal{M}} \varphi(0) = S_{\mathcal{M}}(0,0) = (0,1)$

$\varphi(2) = \varphi(S_{\mathbb{N}} 1) = S_{\mathcal{M}} \varphi(1) = S_{\mathcal{M}}(0,1) = (0,2)$

$\varphi(3) = \varphi(S_{\mathbb{N}} 2) = S_{\mathcal{M}} \varphi(2) = S_{\mathcal{M}}(0,2) = (0,3)$

Ainsi, $\operatorname{im} \varphi = \{0\} \times \mathbb{N} \neq |\mathcal{M}|$. Absurde.

On vérifie que $\mathcal{M}$ vérifie $(A_1) - (A_7)$.

Q3. Soit $F := \forall x\ \forall y\ \ x+y = y+x$.

On a $\mathbb{N} \models F$ mais $\mathcal{M} \not\models F$ car $(1,1) + (2,1) = (1,2)$

et $(2,1) + (1,1) = (2,2)$.

D'où P_0 n'est pas complète.

Exercice 5. Ensembles définissables.

Q1. $F_{2\mathbb{N}}(x) := \exists y \quad x = y + y.$

Q2. $F_{\mathbb{P}}(x) := \forall y \; (\exists z \quad x = y \times z) \to (y = x \; \vee \; y = (S0))$

Q3. (a) $\forall x \quad F_E(x) \to F_{E'}(x)$

(b) $F_E(x) \wedge \forall y < x \; \neg F_E(y) \qquad)) \; G(x)$

(c) $(\exists x \quad F_E\, x) \wedge (\forall x \quad F_E(x) \to \exists y > x \quad F_E(y))$

Q4. $P_E(y) := (\exists x \leq y \quad F_E(x)) \to \exists x \quad G(x) \wedge x \leq y$

Q5.

(a)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_0 \vdash A_4}\,\text{ax}}{P_0 \vdash 0+0=0}}{P_0 \vdash \exists z \; 0 + z = 0}$$

(b) Long et se fait par induction sur y. (fait en cours)

(c)

$\Gamma := P_0, \dots, x+y=0, x = Sz$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x+y=0}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash S(z+y) \neq 0}\,A_1}{\Gamma \vdash Sz + y \neq 0}\,A_5}{\Gamma \vdash x+y \neq 0}}{P_0, \dots, x+y=0, \; x = Sz \quad \vdash \bot}}{P_0, \exists y \quad x+y=0, \; x \neq 0, \; x = Sz \quad \vdash \bot}\,\exists e}{P_0, \exists y \quad x+y=0, \quad x \neq 0 \quad \vdash \bot}\,A_2}{P_0, \exists y \quad x+y=0 \vdash x = 0}\,\bot_c$$

(d) On utilise le schéma inductif:

- $P_E(0) \; : \; F_E(0) \to \underbrace{F_E(0)}_{\text{hyp}} \wedge \underbrace{0 \leq 0}_{(a)} \wedge \underbrace{\forall y < 0 \; \neg F_E(0)}_{\neg(\underbrace{y + Sz}_{S(y+z) \text{ par } A_5} = 0) \to A_1}$

- $P_E(n) \to P_E(n+1)$

$\exists y \leq n+1 \quad F_E(y) \to$ si $y \leq n \to P_E(n)$ et $n \leq n+1$

$ \to$ sinon $y = n+1 \to G(n+1) \wedge n+1 \leq n+1.$

Lo car sinon, on était dans l'autre cas.

Q6. $(\exists x \; F_E(x)) \rightarrow \exists y \; G(y)$

Soit $x \in E$. Par Q5, $\exists y$, $G(y) \wedge y \leq x$.
D'où $G(y)$.

Q7.

1D 7

Exercice 1. Modèles sans schéma d'induction

Q1. A_1 okay A_2 okay A_3 okay A_4 $f(x, *) = x$
A_5 okay A_6 $g(x, *) = *$ A_7 $f(g(x,y), x) = g(x,y)$

En effet :

$$(x,n) +_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}}(y,m) = (x,n) +_{\mathcal{R}} (y, m+1)$$
$$= (f(x,y), n+m+1)$$
$$= S_{\mathcal{R}}(f(x,y), n+m)$$

$$(x,n) \times_{\mathcal{R}} S_{\mathcal{R}}(y,m) = (x,n) \times_{\mathcal{R}} (y, m+1)$$
$$= (g(x,y), nm+n)$$

$$((x,n) \times_{\mathcal{R}} (y,m)) +_{\mathcal{R}} (x,n)$$
$$= (g(x,y), nm) +_{\mathcal{R}} (x,n)$$
$$= (f(g(x,y),x), nm+n)$$

Q2. Commutativité : $f(x,y) = f(y,x)$ et $g(x,y) = g(y,x)$
Associativité : $f(f(x,y), z) = f(x, f(y,z))$
$g(g(x,y), z) = g(x, g(y,z))$

Q3. c.f. 1D6 exercice 4

Q4. $x \leq y ::= \exists z,\ x + z = y$

$$(x,n) \leq_{\mathcal{R}} (y,m) \iff \exists (z,p),\ (x,n) +_{\mathcal{R}} (z,p) = (y,m)$$
$$\iff \exists (z,p),\ (f(x,z), n+p) = (y,m)$$
$$\Leftarrow \exists z,\ f(x,z) = y$$

Q5. $f(x,y) = x \quad g(x,y) = y$

$$(*,0) + (x,n) = (f(*,x), n) = (*,n) \neq (x,n)$$

$$(*,0) \times (x,n) = (g(*,x), 0) = (x,0) \neq (*,0).$$

Exercice 2. Equivalences.

Q1. Supposons avoir T une théorie des relations d'équivalences ayant un nombre fini de classes.

Soit $\varphi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=i+1}^{n} \neg R(x_i, x_j)$.

Puis, $T' := T \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Toute partie $A \subseteq_{finie} T'$ est satisfiable, par exemple $([\![1,n]\!], =)$, où $n = \max\{n' \in \mathbb{N} \mid \varphi_{n'} \in A\}$ fini.

D'où T' satisfiable absurde.

Q2. Par l'absurde, soit T une théorie des relations d'équivalences n'ayant que des classes finies.

Soit $\psi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} R(x_i, x_{i+1}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)$.

Soit $T' := T \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Toute partie finie $A \subseteq_{finie} T'$ est satisfiable, par exemple $([\![1,n]\!], \sim)$, où $n := \max\{n \mid \psi_n \in A\}$ fini et $x \sim y \ \forall x, \forall y$.

D'où T' satisfiable. Absurde.

Q3. On pose $T_* := \{\forall x \ R(x,x), \forall x \forall y \ R(x,y) \to R(y,x)$
$\forall x \forall y \forall z \ R(x,y) \to R(y,z) \to R(x,z)\}$
$\cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Q4. (a) Soit T_1 tel que $T \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$. Il existe donc $T' \subseteq T$ telle que l'on ait $T' \vdash T_1$ (car preuve de $T \vdash T_1$ finie).

On a : $T' \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$ d'où $T' \vdash T$.

(b) Non : sinon $T' \subseteq_{\text{finie}} T_{\equiv}$ donc $n := \min\limits_{\varphi_n \in T'} n$

et $m := \min\limits_{\psi_m \in T'} m$

On considère un ens ayant $< n$ classes toutes de cardinal $< m$. $\rightsquigarrow$ modèle $\mathcal{M}$.
D'où T' admet $\mathcal{M}$ pour modèle. Absurde.

(c) oui en théorie, mais non, cela ne dépend pas.

Q5. Soient $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{N}, =, \text{divisibilité})$,
$\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, =, n \sim m \iff \varphi(n) \approx \varphi(m))$

$\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij.}} \mathbb{N}^2$ où $(p,q) \approx (p',q') \iff p+q' = p'+q$.

Soit $\Psi : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ un $\mathcal{L}$-morphisme.

$n \mid m \iff \Psi(n) \approx \Psi(m)$ Absurde.

TD n° 8

Exercice 1. Des entiers pas commes les autres

La théorie PA des entiers de Peano vérifie :

- $\operatorname{card} \mathbb{R} \geqslant \operatorname{card} \mathcal{L}$;
- $\operatorname{card} \mathbb{R} \geqslant \aleph_0$;
- PA a un modèle infini $\mathbb{N}$.

D'où par Löwenheim-Skolem, PA a un modèle de $\operatorname{card} = \operatorname{card} \mathbb{R}$, non isomorphe à $\mathbb{N}$.

Exercice 2. De nouveaux axiomes

r est une rel° d'ordre (reflexivité par (iv), symmétrie par (v), transitivité par (vi))

qui admet un minimum (i)

s est une fonction injective sans points fixes qui vérifie

$$y \leq_r x \wedge y \leq_r s(x) \Longleftrightarrow y = x \text{ ou } y = s(x)$$

Q1. La structure $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}, succ)$ est un modèle de $\mathbb{N}$.

On pose $(\{0,1\} \times \mathbb{N}, \leq, s)$ où $\leq$ est l'ordre lexicographique sur $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} s : \{0,1\} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \{0,1\} \times \mathbb{N} \\ (x,y) &\longmapsto (x, y+1) \end{aligned}$$

Q2. La théorie $\mathcal{T}$ n'est pas complète : la formule

$$\exists x \ \exists y \quad x \neq y \ \wedge \forall u \ (x \neq S\, u) \wedge (y \neq S u)$$

est vraie dans $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ mais pas dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3. Arithmetique non standard.

Q1. Reflexivité : $\mathcal{M} \models a + \underline{0} = a + \underline{0}$ d'où $a \sim a$ $\forall a$

Symmétrie : si $\mathcal{M} \models a + \underline{n} = b + \underline{m}$ $(a \sim b)$

alors $\mathcal{M} \models b + \underline{m} = a + \underline{n}$ d'où $b \sim a$.

Transitivité : si $\mathcal{M} \models a + \underline{n} = b + \underline{m}$ $(a \sim b)$

et $\mathcal{M} \models b + \underline{p} = c + \underline{q}$ $(b \sim c)$

alors

si $m \geq p$ alors

$\mathcal{M} \models a + \underline{n} = c + \underline{(q + m - p)}$

sinon

$\mathcal{M} \models a + \underline{(n + p - m)} = c + \underline{q}$

Q2. Soient n, m, p, q tels que

$\mathcal{M} \models a + \underline{n} = a' + \underline{m}$ et $\mathcal{M} \models b + \underline{p} = b' + \underline{q}$.

D'où, $\mathcal{M} \models a + b + \underline{n} + \underline{p} = a' + b' + \underline{m} + \underline{q}$

(par commutativité de $+_{\mathcal{M}}$ car $\mathcal{M}$ modèle de PA)

et donc $\mathcal{M} \models (a+b) + \underline{n+p} = (a'+b') + \underline{m+q}$.

Q3. Réflexivité: $A \lesssim A$ car $A \neq \emptyset$ d'où $A \ni a$ vérifie $\mathcal{M} \models a \leq a$.

Transitivité :

si $A \lesssim B$ et $B \lesssim C$ il existe a, b, b', c tels que

$\mathcal{M} \models a \leq b$ et $\mathcal{M} \models b' \leq c$

alors $b \sim b'$ d'où $b + \underline{n} = b' + \underline{m}$

Si $n \leq m$ alors on pose $b^* = b + \underline{(m-n)} \sim b$

et $\mathcal{M} \models a \leq b^*$ et $\mathcal{M} \models b^* \leq c$

Sinon $b^* = b + \underline{(n+m)} \sim b$

et $\mathcal{M} \models a \leq b^*$ et $\mathcal{M} \models b^* \leq c$

On en conclut $\mathcal{M} \models a \leq c$.

Antisymmétrie :

si $A \precsim B$ et $B \precsim A$ alors
il existe a, a', b, b'
tels que
$$\mathcal{M} \models a \leq b \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \models b' \leq a'$$

Comme $b \sim b'$ et $a \sim a'$, on a : $\begin{cases} b + \underline{n} = b' + \underline{m} \\ a + \underline{p} = a' + \underline{q} \end{cases}$

D'où il existe u, v tels que
$$\mathcal{M} \models a + u = b \quad \text{et} \ \mathcal{M} \models b' + v = a'$$

ainsi,

$$a + u + \underline{n} + v = b + \underline{n} + v = b' + \underline{m} + v = a' + \underline{m}$$

d'où $a + u + v \sim a'$ donc $u + v \sim 0$
donc u, v sont standards
d'où $a + u = b \Rightarrow a \sim b$
d'où $A = B$.

Totalité : la relation $\leq_{\mathcal{M}}$ est totale :

Par schéma inductif, montrons pour tout x,

$$\forall y \quad x \leq y \vee y \leq x$$

- $0 \leq y$.
- Si $y \leq x$ alors $y + k = x$ et $y \leq Sx$
  sinon, alors $y \geq x$ donc $y = k + x$
  si $k = 0 \Rightarrow y \leq Sx$
  si $k = Sl \Rightarrow y \geq Sx$

La totalité de $\precsim$ découle de celle de $\leq_{\mathcal{M}}$.