— Révisions de Logique —

Ce document contient des réponses pour les questions de cours pour le partiel/examen de Logique. Je m'excuse pour le format douteux du document.

I. Cours I.

Question I.1.

Énoncer et prouver le lemme de lecture unique.

Énoncé. Toute formule $F \in \mathscr{F}$ vérifie une et une seule de ces propriétés :
(1) $F \in \mathscr{P}$;
(2) il existe G telle que $F = \neg G$;
(3) il existe G, H telles que $F = (G \wedge H)$;
(4) il existe G, H telles que $F = (G \vee H)$;
(5) il existe G, H telles que $F = (G \to H)$;
(6) il existe G, H telles que $F = (G \leftrightarrow H)$.

Preuve. On commence par montrer que les formules de $\mathscr{F}$ sont bien parenthésées. Ensuite, pour un mot $F \in \mathscr{F}$, on est dans un des cas suivants (uniquement un cas) :
- soit $|F| = 0$ absurde car $\varepsilon \notin \mathscr{F}$
- soit $|F| = 1$ alors nécessairement $F \in \mathscr{P}$, cas (1)
- soit $|F| \geqslant 2$ et F commence par $\neg$, alors soit G le mot F sans sa première lettre, par construction $G \in \mathscr{F}$ et donc on est dans le cas (2)
- soit $|F| \geqslant 2$ et F commence par (et termine par) alors, on retire ces deux lettres et on décompose ce mot en deux composantes bien parenthésées F et G séparées nécessairement par une lettre $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Question I.2.

Montrer qu'il y a une bijection entre les formules du calcul propositionnel et les arbres tels que :
- les feuilles sont étiquetées par des variables ;
- les nœuds internes sont étiquetés par des connecteurs ;
- ceux étiquetés par $\neg$ ont un fils, les autres 2.

On construit la fonction par récurrence (forte) sur la taille de la formule considérée :
- on applique le lemme de lecture unique ;
- on applique l'hypothèse de récurrence aux 0/1/2 sous-formules ;
- on construit l'arbre actuel.

Question I.3.

Montrer que toute fonction $\nu : \mathscr{P} \to \{0,1\}$ peut s'étendre de manière unique en une fonction $\mu : \mathscr{F} \to \{0,1\}$ telle que :
- pour tout $p \in \mathscr{P}$, $\nu(p) = \mu(p)$;
- si $F, G \in \mathscr{F}$ alors
  - $\mu(\neg F) = 1 - \mu(F)$,
  - $\mu(F \vee G) = 1$ ssi $\mu(F) = 1$ ou $\mu(G) = 1$,
  - $\mu(F \wedge G) = 1$ ssi $\mu(F) = 1$ et $\mu(G) = 1$,
  - $\mu(F \to G) = 1$ ssi $\mu(F) = 0$ et $\mu(G) = 1$,
  - $\mu(F \leftrightarrow G) = 1$ ssi $\mu(F) = \mu(G)$.

Soit $\nu : \mathscr{P} \to \{0,1\}$ fixée. On montre l'existence et l'unicité de la définition de $\mu(F)$ par induction sur l'arbre de F. Ceci est possible par la bijection arbres étiquetés et formules.

- Pour une variable $p \in \mathscr{P}$, on a nécessairement $\mu(p) := \nu(p)$.
- Pour un nœud de label $\neg$, on a nécessairement $\mu(\neg F) := 1 - \mu(F)$.
- Pour un nœud de label $\wedge$, on a nécessairement $\mu(F \wedge G) := 1$ si on a $\mu(F) = \mu(G) = 1$ et on pose $\mu(F \wedge G) := 0$ sinon.
- De même pour les autres cas.

Question I.4.

Énoncer le théorème de compacité du calcul propositionnel.

Un ensemble de formules est satisfiable ssi toute sous-partie finie de cet ensemble est satisfiable.

Question I.5.

Prouver le théorème de compacité du calcul propositionnel dans le cas où l'ensemble des variables est au plus dénombrable.

Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de formules du calcul propositionnel. Montrons que $\mathscr{E}$ est satisfiable ssi toute partie finie de E est satisfiable.

« $\implies$ ». Si $\mathscr{E}$ est satisfiable, alors soit une certaine valuation satisfaisant $\mathscr{E}$. Cette valuation satisfait toute partie finie de $\mathscr{E}$.

« $\impliedby$ ». Soit $\mathscr{P} = \{x_1, x_2, \dots\}$. On procède en deux étapes.

Étape 1. Par récurrence, on construit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui satisfait : pour toute partie finie F de $\mathscr{E}$, il existe une valuation ν satisfaisant F et qui vérifie $\forall i \leqslant n, \nu(x_i) = \varepsilon_i$.
- Au rang $n = 0$, on a directement que toute partie finie est satisfiable (sans contraintes).
- Au rang n, on a deux cas :
  (1) soit, pour toute partie finie F de $\mathscr{E}$, il existe ν satisfaisant $\nu(x_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \leqslant n$ et $\nu(x_{n+1}) = 0$, alors on pose $\varepsilon_{n+1} := 0$.
  (2) soit, il existe une partie finie F de $\mathscr{E}$ telle que toute valuation ν satisfaisant F avec $\nu(x_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \leqslant n$, et $\nu(x_{n+1}) = 1$. On pose alors $\varepsilon_{n+1} := 1$.

  Soit F' une partie finie de $\mathscr{E}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une valuation ν satisfaisant le sous-ensemble fini $F' \cup F$ et telle que $\nu(x_i) = \varepsilon_i$ pour tout $i \leqslant n$. D'où, ν satisfait F et donc, $\nu(x_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$ par l'hypothèse de la disjonction de cas. Donc, ν satisfait F et donc on a la propriété au rang $n + 1$.

Étape 2. On pose $\mu(x_i) := \varepsilon_i$. Montrons que μ satisfait $\mathscr{E}$. Pour tout $F \in \mathscr{E}$, on a $\mu(F) = 1$ car :
- on pose k tel que $\mathrm{vars}(F) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$;
- l'ensemble $\{F\}$ est fini, donc par la propriété au rang k, il existe ν coïncidant avec μ sur les k premières variables, donc sur les variables de F, et donc $\mu(F) = \nu(F) = 1$.

II. Cours II.

Question II.1.

Énoncer et prouver un lemme de lecture unique pour les termes de la logique du premier ordre dans un langage donné $\mathscr{L}$.

Énoncé. Tout terme $t \in \mathscr{T}$ vérifie une et une seule des propriétés ci-dessous :
- $t \in \mathscr{V}$;
- il existe un symbole de constante $c \in \mathscr{L}$ tel que $t = c$;
- il existe un symbole de fonction n-aire $f \in \mathscr{L}$ et n termes $t_1, \dots, t_n$ tels que $t = f(t_1, \dots, t_n)$

Preuve. On commence par montrer que tout terme est bien parenthésé. Ensuite, soit $t \in \mathscr{T}$. On a un des trois cas suivants :
- soit $|t| = 1$ et $t \in \mathscr{V}$, c'est une variable
- soit $|t| = 1$ et $t \in \mathscr{L}$, c'est un symbole de constante
- soit $|t| \geqslant 2$ et alors on a la première lettre de t qui est un symbole de fonction n-aire, on retire les deux premières lettres et la dernière et on décompose selon les virgules de « dernier niveau » (par rapport au parenthésage). Il y a nécessairement n termes, et chacun représente un terme.

Question II.2.

Énoncer et prouver un lemme de bijection entre certains arbres étiquetés et les termes de la logique du premier ordre dans un langage donné $\mathscr{L}$.

On construit la fonction par récurrence (forte) sur la taille du terme considéré :
- on applique le lemme de lecture unique ;
- on applique l'hypothèse de récurrence aux sous-formules ;
- on construit l'arbre actuel.

Question II.3.

Énoncer et prouver un lemme de lecture unique pour les formules de la logique du premier ordre dans un langage donné $\mathscr{L}$.

Énoncé. Toute formule $F \in \mathscr{F}$ vérifie une et une seule des propriétés ci-dessous :
- il existe un symbole de relation n-aire $R \in \mathscr{L}$ et n termes $t_1, \dots, t_n$ tels que $F = R(t_1, \dots, t_n)$;
- il existe G telle que $F = \neg G$
- il existe G et $x \in \mathscr{V}$ telles que $F = \forall x\, G$
- il existe G et $x \in \mathscr{V}$ telles que $F = \exists x\, G$
- il existe G, H telles que $F = (G \vee H)$
- il existe G, H telles que $F = (G \wedge H)$
- il existe G, H telles que $F = (G \to H)$

Preuve. On commence par montrer que toute formule est bien parenthésée. Ensuite, soit $F \in \mathscr{F}$. On a un des trois cas suivants :
- soit F commence par un symbole de relation, on peut lire de manière unique les termes entre les virgules du « dernier niveau » (par rapport au parenthésage)
- soit F commence par un $\forall$ ou $\exists$, la lettre suivante est $x \in \mathscr{V}$ et la suite est une formule
- soit F commence par une parenthèse ouvrante (et termine nécessairement par une parenthèse fermante) et alors on peut décomposer ce qu'il y a entre les parenthèses en deux formules séparées par $\wedge, \vee$ ou $\to$.

Question II.4.

Donner une preuve de

$$\vdash \neg A \leftrightarrow (A \to \bot)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A, A \vdash \neg A}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{\neg A, A \vdash A}\,\mathsf{ax}}{\neg A, A \vdash \bot}\,\neg_{\mathsf{e}}}{\neg A \vdash A \to \bot}\,\to_{\mathsf{i}}}{\vdash \neg A \to (A \to \bot)}\,\to_{\mathsf{i}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \to \bot, A \vdash A \to \bot}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{A \to \bot, A \vdash A}\,\mathsf{ax}}{A \to \bot, A \vdash \bot}\,\to_{\mathsf{e}}}{A \to \bot \vdash \neg A}\,\neg_{\mathsf{i}}}{\vdash (A \to \bot) \to \neg A}\,\to_{\mathsf{i}}}{\vdash \neg A \leftrightarrow (A \to \bot)}\,\wedge_{\mathsf{i}}$$

III. Cours III.

Question III.1.

> Montrer que, pour toute interprétation $\mathscr{M}$ sur le langage $\mathscr{L}$, tout environnement e et toute formule F, $\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(F,e)$ ne dépend que de la valeur de e sur les variables libres de F.

On commence par montrer le résultat similaire sur les termes (qui se prouve de la même manière).

Par induction sur F, on montre le résultat.
- Si $F = R(t_1,\dots,t_n)$ alors $\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(F,e)$ ne dépend que de $(\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(t_i,e))_{i\in[\![1,n]\!]}$ qui ne dépendent que des valeurs de e sur les variables libres des t_i, et donc $\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(F,e)$ ne dépend que des valeurs de e sur les variables libres de F.
- Si $F = G \vee H$ alors on applique le résultat à G et H et comme $\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(G,e)$ (*resp.* $\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(H,e)$) ne dépend que des valeurs de e sur variables libres de G (*resp.* H) alors la valeur de F ne dépend que des valeurs de e sur les variables libres de F.
- Si $F = \forall x\, G$ alors on applique le résultat à G et comme $\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(G,e[x:=a])$ ne dépend que des valeurs de $e[x:=a]$ sur variables libres de G alors la valeur de F ne dépend que des valeurs de e sur les variables libres de F.
- Les autres cas sont similaires.

Question III.2.

> Montrer que pour toute interprétation $\mathscr{M}$ sur le langage $\mathscr{L}$, tout environnement e et toute formule close F, $\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(F,e)$ ne dépend pas de e.

La valeur $\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(F,e)$ ne dépend que des valeurs de e sur les variables libres de F. La formule F est close donc n'a pas de variables libres. D'où, la valeur de F ne dépend pas de e.

Question III.3.

> Montrer la proposition suivante. Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ deux langages, $\mathscr{M}$ (*resp.* $\mathscr{M}'$) une interprétation de $\mathscr{L}$ (resp $\mathscr{L}'$) et $\mathscr{M}'$ un enrichissement de $\mathscr{M}$, e un environnement, alors :
> (1) si t est un terme de $\mathscr{L}$, $\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(t,e) = \mathscr{V}al_{\mathscr{M}'}(t,e)$;
> (2) si F est une formule de $\mathscr{L}$, alors $(\mathscr{M},e)$ satisfait F ssi $(\mathscr{M}',e)$ satisfait F.

(1) Par induction sur t, on montre le résultat demandé : l'interprétation des symboles dans $\mathscr{M}$ et dans $\mathscr{M}'$ est la même.
(2) Par induction sur F, on montre le résultat demandé : l'interprétation des symboles dans $\mathscr{M}$ et dans $\mathscr{M}'$ est la même.

Question III.4.

> On dit que deux formules F et G du premier ordre sont équivalentes si $F \leftrightarrow G$ est un théorème, c'est à dire si $\vdash F \leftrightarrow G$. Montrer que toute formule est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs logiques $\neg$, $\vee$ et $\exists$.

Idée de la preuve :
- on montre que $\vdash (F \to G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$
- on montre que $\vdash (F \wedge G) \leftrightarrow \neg(\neg F \vee \neg G)$
- on montre que $\vdash (\forall x\, F) \leftrightarrow \neg(\exists x\, \neg F)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F \vdash \exists y\, \neg F[y]}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F, \neg F[y] \vdash \forall x\, F}\,\mathsf{ax}}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F, \neg F[y] \vdash F[y]}\,\forall_{\mathsf{e}}}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F, \neg F[y] \vdash \bot}\,\neg_{\mathsf{e}}}{\forall x\, F, \exists x\, \neg F \vdash \bot}\,\exists_{\mathsf{e}}}{\forall x\, F \vdash \neg(\exists x\, \neg F)}\,\neg_{\mathsf{i}}}{\vdash (\forall x\, F) \to \neg(\exists x\, \neg F)}\,\to_{\mathsf{i}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\exists x\, \neg F), \neg F \vdash \neg(\exists x\, \neg F)}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg(\exists x\, \neg F), \neg F \vdash \neg F}\,\mathsf{ax}}{\neg(\exists x\, \neg F), \neg F \vdash \exists x\, \neg F}\,\exists_{\mathsf{i}}}{\neg(\exists x\, \neg F), \neg F \vdash \bot}\,\neg_{\mathsf{e}}}{\neg(\exists x\, \neg F) \vdash F}\,\bot_{\mathsf{c}}}{\neg(\exists x\, \neg F) \vdash \forall x\, F}\,\forall_{\mathsf{i}}}{\vdash \neg(\exists x\, \neg F) \to \forall x\, F}\,\to_{\mathsf{i}}$$

- on applique ces réécritures récursivement.

Question III.5.

> Montrer que si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont deux interprétations de $\mathscr{L}$ et φ un morphisme de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$, alors pour tout terme t et tout environnement e dans $\mathscr{M}$ on a
> $$\varphi(\mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(t,e)) = \mathscr{V}al_{\mathscr{N}}(t, \varphi(e)).$$

Par induction sur t :
- si t est symbole de constante, alors sa valeur est $\varphi(c_{\mathscr{M}})$ d'une part et $c_{\mathscr{N}}$ de l'autre ;
- si t est variable, alors sa valeur est celle $\varphi(e(x))$ d'une part et $\varphi \circ e(x)$ de l'autre ;
- si t est l'application d'un une fonction n-aire $f(t_1,\dots,t_n)$ alors on applique l'hypothèse d'induction sur tous les sous-termes et on conclut.

Question III.6.

> Montrer que si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont deux interprétations de $\mathscr{L}$ et φ un morphisme *injectif* de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$, alors pour toue formule atomique F et tout environnement e dans $\mathscr{M}$ on a
> $$\mathscr{M}, e \vDash F \quad \text{ssi} \quad \mathscr{N}, \varphi(e) \vDash F.$$

D'une part, si $\mathscr{M}, e \vDash R(t_1,\dots,t_n)$ alors $R_{\mathscr{M}}(v_1,\dots,v_n)$ où l'on note $v_i := \mathscr{V}al_{\mathscr{M}}(t_i,e)$. D'où, par morphisme et le point précédent, on a que $R_{\mathscr{N}}(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))$ et donc que $\mathscr{N}, \varphi(e) \vDash R(t_1,\dots,t_n)$.

D'autre part part, si $\mathscr{N}, \varphi(e) \vDash R(t_1,\dots,t_n)$ alors $R_{\mathscr{N}}(v_1',\dots,v_n')$ où l'on note $v_i' := \mathscr{V}al_{\mathscr{N}}(t_i, \varphi(e))$. D'où, par morphisme injectif et le point précédent, on a que $R_{\mathscr{N}}(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_n))$ pour certains $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et donc que $\mathscr{M}, e \vDash R(t_1,\dots,t_n)$.

Question III.7.

> Montrer que si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont deux interprétations de $\mathscr{L}$ et φ un isomorphisme de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{N}$, alors pour toue formule F et tout environnement e dans $\mathscr{M}$ on a
> $$\mathscr{M}, e \vDash F \quad \text{ssi} \quad \mathscr{N}, \varphi(e) \vDash F.$$

Par induction sur F.
- Pour les formules closes, c'est vrai par le point précédent.
- Pour le $\wedge$, le $\vee$ et le $\to$, on applique directement l'hypothèse d'induction à chaque point.
- Pour le $\forall$ et $\exists$, on a directement le résultat car $\varphi(|\mathscr{M}|) = |\mathscr{N}|$, donc le « pour tout » et le « il existe » dans la définition de la valeur se fait sur le même ensemble.

Question III.8.

> Montrer que deux interprétations isomorphes satisfont les mêmes formules closes.

D'une part, on sait que l'interprétation d'une formule close ne dépend pas de l'environnement considéré. D'autre part, on considère le point précédent et on a $\mathscr{M} \vDash F$ ssi $\mathscr{N} \vDash F$.

IV. Cours IV.

Question IV.1.

Énoncer les deux versions vues en cours du théorème de complétude (au sens de règle-complétude) de Gödel de la logique du premier ordre. Indiquer quel est le sens « correction » et quel est le sens « complétude ».

Version 1. Soit T une théorie et F une formule close. On a $T \vdash F$ ssi $T \vDash F$.

Version 2. Une théorie T est consistante ssi elle est non-contradictoire.

Sens correction : « $\implies$ ». Sens complétude : « $\impliedby$ ».

Question IV.2.

Montrer que les deux versions sont équivalentes (montrer chaque version en utilisant l'autre).

Pour la partie correction.

D'une part, on montre non V2 implique non V1 (par contraposée). Soit T non-contradictoire et inconsistante. Il existe donc un modèle $\mathscr{M}$ tel que $\mathscr{M} \vDash T$ et $T \vdash \bot$. Or, par définition $\mathscr{M} \nvDash \bot$ et donc $T \nvDash \bot$.

D'autre part, on montre V2 implique V1. Soit T et F tels que $T \vdash F$. Ainsi, $T \cup \{\neg F\} \vdash \bot$ et donc $T \cup \{\neg F\}$ est consistante d'où (par hypothèse V2) $T \cup \{\neg F\}$ contradictoire, donc on n'a pas de modèle. On a alors que tous les modèles de T sont des modèles de F, autrement dit $T \vDash F$.

Pour la partie complétude.

D'une part, soit T contradictoire. Elle n'a pas de modèle. Ainsi $T \vDash \bot$ et donc $T \vdash \bot$ par V1, d'où l'inconsistance de T.

D'autre part, soit $T \vDash F$. La théorie $T \cup \{\neg F\}$ n'a pas de modèle, elle est donc contradictoire, donc inconsistante, donc $T \cup \{\neg F\} \vdash \bot$ d'où $T \vdash F$ par $\bot_{\mathsf{c}}$.

Question IV.3.

Énoncer le théorème de compacité (sémantique) de la logique du premier ordre

Une théorie est contradictoire ssi elle est finiment contradictoire, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fini contradictoire.

Question IV.4.

Admettre le théorème de complétude et montrer le théorème de compacité de la logique du premier ordre (on énoncera les deux théorèmes en question).

Théorème de compacité sémantique. Une théorie est contradictoire ssi elle est finiment contradictoire, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble fini contradictoire.

Théorème de complétude. Une théorie est consistante ssi elle est non-contradictoire.

On se munit aussi du théorème suivant.

Théorème de compacité syntaxique. Une théorie est inconsistante ssi elle est finiment inconsistante.

Il est évident car toute preuve de $\bot$ est nécessairement finie, donc n'utilise qu'un sous-ensemble fini de la théorie.

Soit T contradictoire. Alors, T est inconsistante (complétude). Alors T est finiment inconsistante (compacité syntaxique). Donc T est finiment contradictoire (complétude encore).

V. Cours V.

Question V.1.

Donner la définition de théorie complète (au sens d'axiome-complète) en logique du premier ordre.

Une théorie T est *axiome-complète* si $T \nvdash \bot$ et pour tout formule F on a $T \vdash F$ ou $T \vdash \neg F$.

Question V.2.

Montrer sans utiliser le théorème de complétude (au sens de règle-complétude) : Si T est une théorie consistante (qui ne prouve pas l'absurde) dans un langage au plus dénombrable $\mathscr{L}$, alors il existe une théorie T' contenant T et complète.

Y a t-il une preuve plus simple en utilisant le théorème de complétude ?

Soit $T'_0 := T$. Au rang i,
- soit T'_i est complète et alors $T'_{i+1} := T'_i$.
- soit T'_i n'est pas complète, alors il existe une formule F (« la plus petite possible » obtenue à l'aide d'une énumération) telle que $T'_i \nvdash F$ et $T'_i \nvdash \neg F$, et on pose $T'_{i+1} := T'_i \cup \{F\}$.

La théorie $T' := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T'_i$ est complète.

Avec le théorème de complétude, on construit directement la théorie T' dans la construction du modèle Th de T.

VI. Cours VI.

Question VI.1.

Montrer que $\mathscr{P} \vdash \forall x\, \forall y\; x + y = y + x$.

On procède à l'aide du schéma inductif sur x : $F(x) := \forall y\; x + y = y + x$.

- Avec le schéma inductif sur x, on montre $\mathscr{P} \vdash \forall x\; 0 + x = x$: le cas $0 + 0 = 0$ se traite par A4 et le cas $0 + x = x \to 0 + (\boldsymbol{S}\; x) = \boldsymbol{S}\; x$ avec A5.
- Avec le schéma inductif sur y, on montre $\mathscr{P} \vdash \forall x\, \forall y\; \boldsymbol{S}(x + y) = (\boldsymbol{S}\; x) + y$.

Question VI.2.

Montrer que $\mathscr{P} \vdash \forall x\, \forall y\; x \times y = y \times x$.

Par double schéma inductif, comme la question précédente.

VII. Cours VII.

Question VII.1.

Énoncer le théorème de représentation.

Toute fonction récursive totale est représentable. Autrement dit : l'ensemble des fonctions représentables contient les projections, la fonction successeur, les fonctions constantes, et cet ensemble est stable par composition, récursion primitive et minimisation.

Question VII.2.

Étant données des formules $F_1, \dots, F_p, G$ qui représentent des fonctions totales $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $\dots$, $f_p(x_1, \dots, x_n)$, $g(x_1, \dots, x_p)$ donner une formule qui représente la fonction composée $g(f_1, \dots, f_p)$.

Soient $F_i(x_0, x_1, \dots, x_n)$ représentant f_i pour tout i et soit la formule $G(x_0, \dots, x_p)$ représentant g. On pose

$$H(x_0, \dots, x_n) \coloneqq \exists y_0 \cdots \exists y_n \, G(x_0, y_1, \dots, y_n) \land \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i(y_1, x_1, \dots, x_n).$$

VIII. Cours VIII.

On pose :
- $\alpha_2(n, m) := (n+m)(n+m+1)/2 + n$
- $\alpha_3(x, y, z) := \alpha_2(x, \alpha_2(y, z))$
- $\sharp 0 := \alpha_3(0, 0, 0)$
- $\sharp x_n := \alpha_3(n+1, 0, 0)$
- $\sharp(\boldsymbol{S}\, t_1) := \alpha_3(\sharp t_1, 0, 1)$
- $\sharp(t_1 + t_2) := \alpha_3(\sharp t_1, \sharp t_2, 2)$
- $\sharp(t_1 \times t_2) := \alpha_3(\sharp t_1, \sharp t_2, 3)$.

Question VIII.1.

Montrer que l'ensemble des numéros de termes est un ensemble primitif récursif.

Il suffit de montrer que l'on peut décider si un entier x est un numéro de terme à l'aide de fonctions primitives récursives. On notera $T(x)$ la fonction indicatrice de $\{\sharp t \mid t \text{ est un terme de } \mathscr{L}_0\}$. Pour cela, on utilise un lemme de définition par cas et récursion.
- Si $\beta_3^3(x) = 0$ et $\beta_3^2(x) = 0$ alors $T(x) := 1$ (c'est soit zéro, soit une variable).
- Si $\beta_3^3(x) = 1$ et $\beta_3^2(x) = 0$ alors $T(x) := T(\beta_3^1(x))$ (c'est un successeur).
- Si $\beta_3^3(x) = 2$ ou 3 alors $T(x) := T(\beta_3^1(x)) \times T(\beta_3^2(x))$ (c'est un $\times$ ou $+$).
- Sinon, $T(x) := 0$.

Question VIII.2.

Montrer que l'ensemble des couples $(\sharp t, n)$ où t est un terme et x_n n'a pas d'occurrence dans t est récursif primitif.

On définit la fonction caractéristique de cet ensemble, noté $g_0(x, y)$. On utilise pour cela la définition par cas et récursion.

- Si $\beta_3^3(x) = \beta_3^2(x) = 0$ et $\beta_3^1(x) - 1 \neq y$ alors $g_0(x, y) := 1$.
- Si $\beta_3^3(x) = 1$ et $\beta_3^2(x) = 0$ alors $g_0(x, y) := g_0(\beta_3^2(x), y)$.
- Si $\beta_3^3(x) = 2$ ou 3 alors $g_0(x, y) := g_0(\beta_3^1(x), y) \times g_0(\beta_3^2(x), y)$.
- Sinon, $g_0(x, y) := 0$.