Hugo SALOU
Dept. Informatique

Devoir Maison n° 1
Logique

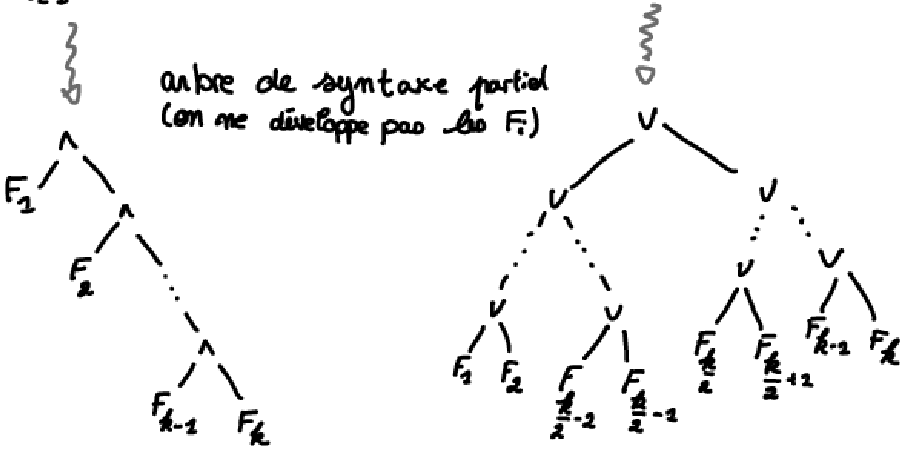
Exercice 1. Complétude du calcul propositionnel.

Avant de commencer, fixons quelques conventions. Les opérateurs $\wedge$ et $\vee$ sont fondamentalement binaires. L'opérateur n-aire $\bigwedge$ est défini par :

$$\bigwedge_{i=1}^{k} F_i := F_1 \wedge (F_2 \wedge (\dots (F_{k-1} \wedge F_k)\dots)).$$

L'opérateur 2^n-aire $\bigvee$ est défini de telle sorte que l'arbre de syntaxe (partiel) soit binaire complet.

$$\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \qquad\qquad \bigvee_{i=1}^{k} F_i \quad (\text{avec } k = 2^n)$$



$\Rightarrow$ peigne binaire $\qquad\qquad$ $\Rightarrow$ complet binaire.

La convention pour $\bigvee$ peut sembler trop restrictive mais on ne l'utilise qu'en "résultat intermédiaire" ; il n'y a pas de $\bigvee$ dans l'énoncé du théorème de complétude.

On ajoute également une règle dérivable, t.e. :

$$\frac{}{\Gamma \vdash F \vee \neg F}\ \text{t.e.}$$

On peut le faire car il suffirait de remplacer une utilisation de cette règle par le morceau d'arbre ci-dessous :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, \neg(F \vee \neg F) \vdash F}\,ax}{F, \neg(F \vee \neg F) \vdash F \vee \neg F}\,\vee_i^g \quad \dfrac{}{F, \neg(F \vee \neg F) \vdash \neg(F \vee \neg F)}\,ax}{F, \neg(F \vee \neg F) \vdash \bot}\,\neg e}{\neg(F \vee \neg F) \vdash \neg F}\,\neg i}{\neg(F \vee \neg F) \vdash F \vee \neg F}\,\vee_i^d \quad \dfrac{}{\neg(F \vee \neg F) \vdash \neg(F \vee \neg F)}\,ax}{\neg(F \vee \neg F) \vdash \bot}\,\neg e}{\dfrac{\vdash F \vee \neg F}{\Gamma \vdash F \vee \neg F.}\,aff}\,\bot_c
$$

On ajoute aussi une famille de règles correspondant à l'une des lois de De Morgan mais avec un " $\bigvee$. " On peut le faire car, par la suite, on n'utilisera qu'un nombre fini de règles.

$$
\dfrac{\Gamma \vdash (\bigvee E) \wedge F}{\Gamma \vdash \bigvee \{H \wedge F \mid H \in E\}}\, dm_n \qquad \text{où } \# E = 2^n
$$

Construisons la dérivation de dm_n par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$, on note $E = \{A, B\}$, et on a :

$$
\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash (A \vee B) \wedge F}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\wedge_e^g \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash (A \vee B) \wedge F}{\Gamma, A \vdash (A \vee B) \wedge F}\,aff}{\Gamma, A \vdash F}\,\wedge_e^d}{\Gamma, A \vdash A \wedge F}\,\wedge_i}{\Gamma, A \vdash (A \wedge F) \vee (B \wedge F)}\,\vee_i^g \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B \vdash B}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash (A \vee B) \wedge F}{\Gamma, B \vdash (A \vee B) \wedge F}\,aff}{\Gamma, B \vdash F}\,\wedge_e^d}{\Gamma, B \vdash B \wedge F}\,\wedge_i}{\Gamma, A \vdash (A \wedge F) \vee (B \wedge F)}\,\vee_i^d}{\Gamma \vdash (A \wedge F) \vee (B \wedge F)}\,\vee_e
$$

- Pour $n > 1$, on écrit $E =: E_1 \sqcup E_2$, et on a :

$$
\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash (\bigvee E_1 \vee E_2) \wedge F}{\Gamma \vdash \bigvee E_1 \vee \bigvee E_2}\,\wedge_e^g \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \bigvee E_1 \vdash \bigvee E_1}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash (\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2) \wedge F}{\Gamma \vdash F}\,\wedge_i^d}{\Gamma, E_1 \vdash F}\,aff}{\Gamma, \bigvee E_1 \vdash (\bigvee E_1) \wedge F}\,\wedge_i}{\Gamma, \bigvee E_1 \vdash \bigvee \{H \wedge F \mid H \in E_1\}}\,dm_{n-1}}{\Gamma, \bigvee E_1 \vdash \bigvee \{H \wedge F \mid H \in E_1\} \vee \bigvee \{H \wedge F \mid H \in E_2\}}\,\vee_i^g \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \bigvee E_2 \vdash \bigvee E_2}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash (\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2) \wedge F}{\Gamma \vdash F}\,\wedge_i^d}{\Gamma, E_2 \vdash F}\,aff}{\Gamma, \bigvee E_2 \vdash (\bigvee E_2) \wedge F}\,\wedge_i}{\Gamma, \bigvee E_2 \vdash \bigvee \{H \wedge F \mid H \in E_2\}}\,dm_{n-1}}{\Gamma, \bigvee E_2 \vdash \bigvee \{H \wedge F \mid H \in E_1\} \vee \bigvee \{H \wedge F \mid H \in E_2\}}\,\vee_i^d}{\Gamma \vdash \bigvee \{H \wedge F \mid H \in E_1\} \vee \bigvee \{H \wedge F \mid H \in E_2\}}\,\vee_e
$$

Par la suite, on omettra l'indice n dans dm_n.

Q1. Par récurrence sur n, montrons $\vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\{X_1,\dots,X_n\}}\}$.

- Pour $n=1$, on a :

$$\dfrac{}{\vdash X_1 \vee \neg X_1}\,\text{te}$$

- Pour $n>1$, on note $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \setminus \{X_n\}$, et on a :

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash X_n \vee \neg X_n}\,\text{te} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{par hyp. de récurrence}}{\vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \text{ val° sur } \mathcal{V}'\}}}{X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\text{aff} \quad \dfrac{}{X_n \vdash X_n}\,\text{ax}}{X_n \vdash (\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}) \wedge X_n}\,\wedge_i}{X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,dm}{X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\} \vee \bigvee\{\varphi(v) \wedge \neg X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\vee_i^g \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{par hyp. de récurrence}}{\vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \text{ val° sur } \mathcal{V}'\}}}{\neg X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\text{aff} \quad \dfrac{}{\neg X_n \vdash \neg X_n}\,\text{ax}}{\neg X_n \vdash (\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}) \wedge \neg X_n}\,\wedge_i}{\neg X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge \neg X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,dm}{\neg X_n \vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\} \vee \bigvee\{\varphi(v) \wedge \neg X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\vee_i^d}{\vdash \bigvee\{\varphi(v) \wedge X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\} \vee \bigvee\{\varphi(v) \wedge \neg X_n \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}'}\}}\,\vee_e$$

Q2. On procède par induction sur $F \in \mathcal{F}$, pour montrer que :

$\forall v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}$,
- si $v(F) = 1$ alors $\varphi(v) \vdash F$
- si $v(F) = 0$ alors $\varphi(v) \vdash \neg F$.

On a 5 cas.

- Cas 1 : $F = G \wedge H$. Soit v une valuation.

→ Si $v(F) = 1$, alors $v(G) = v(H) = 1$ et donc $\varphi(v) \vdash G$ et $\varphi(v) \vdash H$. Et, on a :

$$\dfrac{\varphi(v) \vdash G \qquad \varphi(v) \vdash H}{\varphi(v) \vdash G \wedge H}\,\wedge_i$$

→ Si $v(G) = 0$, alors $\varphi(v) \vdash \neg G$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash G \wedge H}\,\text{ax}}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash G}\,\wedge_e^g \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg G}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash \neg G}\,\text{aff}}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v) \vdash \neg(G \wedge H)}\,\neg_i$$

→ Si $v(H) = 0$, alors $\varphi(v) \vdash \neg H$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash G \wedge H}\,\text{ax}}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash H}\,\wedge_e^d \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg H}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash \neg H}\,\text{aff}}{G \wedge H, \varphi(v) \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v) \vdash \neg(G \wedge H)}\,\neg_i$$

- **Cas 2** : $F = G \to H$. Soit v une valuation sur V.
  - $\to$ si $v(G) = 0$, alors $\varphi(v) \vdash \neg G$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \vdash G}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg G}{\varphi(v), G \vdash \neg G}\,\text{aff}}{\varphi(v), G \vdash \bot}}{\varphi(v), G \vdash H}\,\bot_i}{\varphi(v) \vdash G \to H}$$

  - $\to$ Si $v(H) = 1$, alors $\varphi(v) \vdash H$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(v) \vdash H}{\varphi(v), G \vdash H}\,\text{aff}}{\varphi(v) \vdash G \to H}\,\to_i$$

  - $\to$ Si $v(G) = 1$ et $v(H) = 0$, alors

    $\varphi(v) \vdash G$ et $\varphi(v) \vdash \neg H$.

    Et, on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \to H \vdash G \to H}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\varphi(v) \vdash G}{\varphi(v), G \to H \vdash G}\,\text{aff}}{\varphi(v), G \to H \vdash H}\,\to_e \qquad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg H}{\varphi(v), G \to H \vdash \neg H}\,\text{aff}}{\varphi(v), G \to H \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v) \vdash \neg(G \to H)}\,\neg_i$$

- **Cas 3** : $F = \neg G$. Soit v une valuation.
  - $\to$ Si $v(F) = 1$ alors $v(G) = 0$ et donc $\varphi(v) \vdash \underbrace{\neg G}_{F}$.
  - $\to$ Si $v(F) = 0$ alors $\varphi(v) \vdash G$ et on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi(v) \vdash G}{\varphi(v), \neg G \vdash G}\,\text{aff} \qquad \dfrac{}{\varphi(v), \neg G \vdash \neg G}\,\text{ax}}{\varphi(v), \neg G \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v) \vdash \underbrace{\neg\neg G}_{F}}\,\neg_i$$

- **Cas 4** : $F = G \vee H$. Soit v une valuation.
  - $\to$ Si $v(G) = 1$ alors $\varphi(v) \vdash G$, et on a : $\dfrac{\varphi(v) \vdash G}{\varphi(v) \vdash G \vee H}\,\vee_i^g$
  - $\to$ Si $v(H) = 1$ alors $\varphi(v) \vdash H$ et on a : $\dfrac{\varphi(v) \vdash H}{\varphi(v) \vdash G \vee H}$
  - $\to$ Si $v(G) = 0$ et $v(H) = 0$

    alors $\varphi(v) \vdash \neg G$ et $\varphi(v) \vdash \neg H$. Et, on a :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G \vee H \vdash G \vee H}\,\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G\vee H, G \vdash G}\,\text{ax} \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg G}{\varphi(v), G \vee H, G \vdash \neg G}\,\text{aff}}{\varphi(v), G \vee H, G \vdash \bot}\,\neg_e \quad \dfrac{\dfrac{}{\varphi(v), G\vee H, H \vdash H}\,\text{ax} \quad \dfrac{\varphi(v) \vdash \neg H}{\varphi(v), G \vee H, H \vdash \neg H}\,\text{aff}}{\varphi(v), G \vee H, H \vdash \bot}\,\neg_e}{\varphi(v), G \vee H \vdash \bot}\,\vee_e}{\varphi(v) \vdash \neg(G \vee H)}\,\neg_i$$

- **Cas 5** : $F = X_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$. Soit v une valuation.

  On a :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j \chi_j \vdash \bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j \chi_j}\,ax}{\vdots}\,\wedge_e^d}{\bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j \chi_j \vdash \bigwedge_{j=i-1}^{n} \varepsilon_j \chi_j}\,\wedge_e^d}{\bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j \chi_j \vdash \varepsilon_i \chi_i \wedge \bigwedge_{j=i}^{n} \varepsilon_j \chi_j}\,\wedge_e^d}{\bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j \chi_j \vdash \varepsilon_i \chi_i .}\,\wedge_e^g
$$

On utilise $i-1$ fois la règle $\wedge_e^d$

Ceci conclut l'induction.

Q 3. Montrons, par induction sur l'arbre de syntaxe (partiel) de $\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\}$, que

$$\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\} \vdash F.$$

- Cas de base :

$$
\dfrac{\dfrac{}{\varphi(v_1) \vee \varphi(v_2) \vdash \varphi(v_1) \vee \varphi(v_2)}\,ax \qquad \overbrace{\dfrac{\varphi(v_1) \vdash F}{\varphi(v_1) \vee \varphi(v_2), \varphi(v_1) \vdash F}\,aff \qquad \dfrac{\varphi(v_2) \vdash F}{\varphi(v_1) \vee \varphi(v_2), \varphi(v_2) \vdash F}\,aff}^{\text{Par Q2, comme } v_1(F) = v_2(F) = 1}}{\varphi(v_1) \vee \varphi(v_2) \vdash F}
$$

- Cas inductif :

$$
\dfrac{\dfrac{}{\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2 \vdash \bigvee E_1 \vee \bigvee E_2}\,ax \qquad \overbrace{\dfrac{\bigvee E_1 \vdash F}{\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2, \bigvee E_1 \vdash F}\,aff \qquad \dfrac{\bigvee E_2 \vdash F}{\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2, \bigvee E_2 \vdash F}\,aff}^{\text{Par hypothèse d'induction}}}{\bigvee E_1 \vee \bigvee E_2 \vdash F}\,\vee_e
$$

Q4. Soit F une formule telle que $\models F$, i.e. une tautologie. On a :

$$
\dfrac{\dfrac{\overbrace{\bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\} \vdash F}^{\text{par Q3.}}}{\vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\} \to F}\,\to_i \qquad \overbrace{\vdash \bigvee\{\varphi(v) \mid v \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}\}}^{\text{par Q1.}}}{\vdash F}\,\to_e
$$

Ceci conclut l'exercice 1.

Exercice 2. Tuiles de Wang.

Soit Tuiles l'ensemble fini des tuiles considérées.
Soit $(p_{x,y,t})_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\, t\in \text{Tuiles}}$ une famille de variables propositionnelles.

Pour $x,y \in \mathbb{Z}^2$, on construit les formules :

- $A_{x,y} := \bigvee_{t\in \text{Tuiles}} \Big(\overbrace{p_{x,y,t}}^{1} \wedge \overbrace{N_{x,y,t} \wedge S_{x,y,t} \wedge E_{x,y,t} \wedge W_{x,y,t}}^{2} \wedge \overbrace{\bigwedge_{t'\neq t} \neg p_{x,y,t'}}^{3} \Big)$
- $N_{x,y,t} := \bigvee_{\substack{t'\in \text{Tuiles} \\ \mathcal{N}(t)=\mathcal{S}(t')}} p_{x,y+1,t'}$
- $S_{x,y,t} := \bigvee_{\substack{t'\in \text{Tuiles} \\ \mathcal{S}(t)=\mathcal{N}(t')}} p_{x,y-1,t'}$
- $W_{x,y,t} := \bigvee_{\substack{t'\in \text{Tuiles} \\ \mathcal{W}(t)=\mathcal{E}(t')}} p_{x-1,y,t'}$
- $E_{x,y,t} := \bigvee_{\substack{t'\in \text{Tuiles} \\ \mathcal{E}(t)=\mathcal{W}(t')}} p_{x+1,y,t'}$

où l'on note, pour $t=(N,W,S,E)\in \text{Tuiles}$,
- $\mathcal{N}(t) := N$
- $\mathcal{W}(t) := W$
- $\mathcal{S}(t) := S$
- $\mathcal{E}(t) := E$

On pose $\mathcal{P} := \{ p_{x,y,t} \mid x,y\in\mathbb{Z},\, t\in \text{Tuiles}\}$.

On numérote les tuiles : $\text{Tuiles} = \{ t_i \mid i \in [\![1,n]\!] \}$ avec $n = \#\text{Tuiles}$.

On pose $\mathcal{A} := \{ A_{x,y} \mid x,y\in\mathbb{Z}^2 \}$; c'est un ensemble de formules <u>finies</u>.

Par le théorème de compacité, on a :

$\mathcal{A}$ satisfiable ssi $\mathcal{A}$ finiment satisfiable.

Et, par construction, on a que $\mathcal{A}$ satisfiable ssi Tuiles pave le plan.
En effet, le pavage associé est :

$q : \mathbb{Z}^2 \to \text{Tuiles}$

$x,y \mapsto$ l'unique t tel que $v(p_{x,y,t}) = 1$

où v est la valuation.

$\left.\begin{array}{l} \to \text{existence par } 1 \\ \to \text{unicité par } 3 \\ \to \text{respecte la condition de pavage par } 2 \end{array}\right\} (*)$

Réciproquement, si $q : \mathbb{Z}^2 \to$ Tuiles est un pavage, on construit :

$$\nu : \mathcal{P} \to \{0,1\}$$
$$p_{x,y,t} \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } q(x,y) = t \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La valuation ν, ainsi construite, satisfait $\mathcal{A}$.

De plus, on a que $\mathcal{A}$ est finiement satisfiable ssi toute partie finie du plan peut être pavée par Tuiles.

En effet, si $\mathcal{A}' \subseteq_{\text{finie}} \mathcal{A}$ alors on peut paver

$$P := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid A_{x,y} \in \mathcal{A}'\} \subseteq_{\text{finie}} \mathbb{Z}^2 \qquad (**)$$

avec

$$q : P \to \text{Tuiles}$$
$$(x,y) \mapsto \text{l'unique } t^{\in \text{Tuiles}} \text{ telle que } \nu(p_{x,y,t}) = 1. \to \text{comme pour } (*)$$

où ν est la valuation.

Réciproquement, si Tuiles pave $P \subseteq_{\text{finie}} \mathbb{Z}^2$ alors la valuation

$$\nu : \mathcal{P} \to \{0,1\}$$
$$p_{x,y,t} \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \notin P \\ 1 \text{ si } (x,y) \in P \text{ et } q(x,y) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

satisfait

$$\{A_{x,y} \mid (x,y) \in P\} \subseteq_{\text{finie}} \mathcal{A} \qquad (***)$$

où q est le pavage considéré.

Finalement, on a que toutes les parties finies de $\mathcal{A}$ sont de la forme (***) (pour un certain P) et toutes les parties finies de $\mathbb{Z}^2$ sont de la forme (**) (pour un certain ct').

En conclusion : un ensemble fini de tuiles pave le plan ssi il pave toute partie finie du plan.

Ceci conclut l'exercice 2.