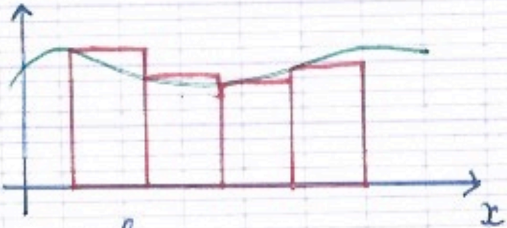
hugo
SALOU
L3-ENS

Intégration & mesure

I. Introduction

Le but de ce cours est d'étudier l'intégrale de Lebesgue, avec plus de propriétés.

Au XIX^{e} siècle, Cauchy et Riemann travaillent sur l'intégration de Riemann, où l'on calcule l'aire en subdivisant l'intervalle.



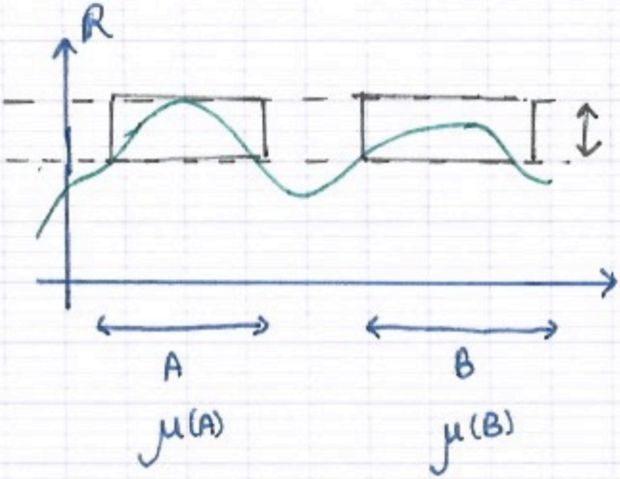
Pour définir une intégrale, on se demande d'avoir deux propriétés :

① $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$
où $F' = f$.

② une définition compatible avec l'aire sous la courbe.

Pour l'intégrale de Riemann, on a besoin que la fonction soit continue par morceaux, donc bornée.

Au contraire de celle de Riemann, l'intégrale de Lebesgue subdivise l'espace d'arrivée:



Cette nouvelle définition permet de calculer des intégrales de fonctions plus variées:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{ou} \quad f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$$

On aimerait, en plus des propriétés usuelles, que l'intégrale soit stable par passage à la limite.

II. Ensembles dénombrables.

On dit qu'un ensemble A est dénombrable s'il existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$.

On dit qu'un ensemble B est fini s'il existe une bijection entre B et $[\![1, n]\!]$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

On pourra ainsi noter :

→ $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$

→ $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$

→ $n = \text{card } B$.

On dit enfin que c est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

Proposition : Si $A \subseteq \mathbb{N}$, alors A est au plus dénombrable

preuve : / idée
- Si $A = \emptyset$, alors A est fini.
- Si $A \neq \emptyset$, alors on peut définir $x_0 = \min A$.

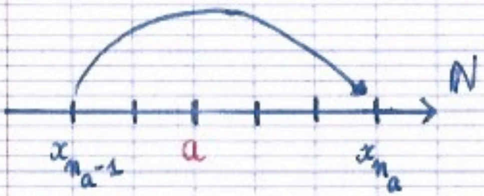
On suppose A infini, et on définit par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

→ $x_0 = \min(A)$

→ $x_{n+1} = \min(A \setminus \{x_0, \dots, x_n\})$

- L'application $n \mapsto x_n$ est injective.
- Soit $a \in A$. On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq n$.

On pose $J_a = \{ n \in \mathbb{N} \mid x_n \geqslant n \}$.
On sait que $J_a \neq \emptyset$; on peut donc définir $n_a = \min J_a$.



- Si $n_a = 0$, alors
  $x_{n_a} = x_0 = \min A$.

  Or $a \leq x_{n_a}$
  et donc $a \leq \min A$
  d'où $a = \min A$
  et donc $a = x_{n_a} = x_0$.

- Si $n_a > 0$, alors
  $x_0 < \dots < x_{n_a-1} < a \leq x_{n_a}$.

Mais, $x_{n_a} = \min(A \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n_a-1}\}) \leq a$
et $x_{n_a} \geq a$ (car $x_{n_a} \in J_a$).

On en déduit $x_{n_a} = a$.

L'application est donc bijective. □

Proposition :
- S'il existe $i : A \to \mathbb{N}$ une injection, alors A est au plus dénombrable.
- S'il existe $s : \mathbb{N} \to A$ une surjection, alors A est au plus dénombrable.

idée de la preuve :

- On sait que $i : A \to i(A)$ est une bijection. Comme $i(A) \subseteq \mathbb{N}$, $i(A)$ est au plus dénombrable, donc, par composition des bijections, A est au plus dénombrable

$$A \xrightarrow{\text{bij}} i(A) \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{N} \text{ ou } [\![1, n]\!]$$

- On peut définir

$$n_x = \min(s^{-1}(\{x\})),$$

quel que soit $x \in A$.

L'application $x \mapsto n_x$ est une bijection. □

Exemples

- $\mathbb{Z}$ est dénombrable :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 2k & \text{si } k \geq 0 \\ -2k-1 & \text{si } k < 0 \end{cases} \end{array}$$

- $\mathbb{N}^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Soient $(p_1, \ldots, p_k)$ les k premiers nombres premiers. On définit donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^k &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n_1, \ldots, n_k) &\longmapsto p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} \end{aligned}$$

Proposition : Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

preuve : Si $A_1, \ldots, A_k$ sont dénombrables, alors il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ des bijections de la forme

$$\varphi_i : A_i \longrightarrow \mathbb{N}$$

pour $i \in [\![1, k]\!]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi : A_1 \times \cdots \times A_k &\longrightarrow \mathbb{N}^k \\ (a_1, \ldots, a_k) &\longmapsto (\varphi_1(a_1); \ldots, \varphi_k(a_k)) \end{aligned}$$

est bijective, et donc $A_1 \times \cdots \times A_k$ est dénombrable $\square$

Exemple :

- $\mathbb{Q}$ est dénombrable :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (p, q) &\longmapsto p/q \end{aligned}$$

est surjective.

- Une union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

En effet, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, et on a $s_i : \mathbb{N} \to A_i$ une bijection, pour $i \in I$. Et, on pose :

$$\begin{aligned} s : I \times \mathbb{N} &\longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \\ (i, n) &\longrightarrow s_i(n). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{finies}}(\mathbb{N}) &= \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ est finie} \} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(\mathbb{N}) \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ à n éléments.

- $\mathbb{Z}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^{n-1}) \longrightarrow \mathbb{Z}[X].$$
$$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) \longmapsto a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0.$$

- L'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques est dénombrable car

$$\mathcal{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X]} \{ z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0 \}.$$

Théorème (Cantor) : Il existe des ensembles non dénombrables. Par exemple, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

preuve: Soit $S = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. On montre par l'absurde que S n'est pas dénombrable. Supposons qu'il existe une bijection

$$\varepsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

On note

$$\varepsilon(n) = (\varepsilon_0(n), \varepsilon_1(n), \dots, \varepsilon_k(n), \dots)$$

$$\begin{array}{l|cccccc}
\varepsilon(0): & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
\varepsilon(1): & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\varepsilon(2): & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\varepsilon(3): & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

On définit alors

$$\tilde{\varepsilon} = (1 - \varepsilon_0(0), 1 - \varepsilon_1(1), \dots, 1 - \varepsilon_k(k), \dots)$$

et $\tilde{\varepsilon} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{\varepsilon(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, absurde!

□

Exemples :

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable car

$$\begin{aligned} \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varepsilon &\longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2\varepsilon_n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

est une injection, ce qui serait impossible si $\mathbb{R}$ était dénombrable.

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable car

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A &\longmapsto (\mathbb{1}_A(n))_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

est une bijection.

Théorème (Cantor) : On ne peut pas avoir une bijection de la forme $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

preuve: Par l'absurde, soit une bijection

$$f : X \to \mathcal{P}(X).$$

Alors, on pose $S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.
Soit $s = f^{-1}(S)$, alors $f(s) = S$,
et donc

$$s \in S \Leftrightarrow s \notin f(s) \Leftrightarrow s \notin S.$$

Absurde! □

III Sommes de nombres positifs.

On s'autorise à sommer des réels positifs potentiellement infinis :

$$a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

En général, si J est un ensemble et $(a_j)_{j\in J}$ est une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$,

alors on définit

$$\sum_{j\in J} a_j = \sup\left\{ \sum_{i\in I} a_i \;\middle|\; \begin{array}{l} I \subseteq J \\ \text{et} \\ I \text{ est fini} \end{array} \right\}$$

Proposition : Si J est dénombrable et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion) de parties finies de J telle que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = J,$$

alors

$$\sum_{j\in J} a_j = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in A_n} a_j$$

■

Hugo
SALOU
L3-ENS

Chapitre 1.

Bases de la théorie de la mesure.

1. σ-algèbre.

On pose X un ensemble.

Définition. On dit que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une algèbre (de Boole) dès lors que

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Remarque. Une algèbre de Boole est stable par intersection :

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c.$$

Définition. On dit que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une σ-algèbre dès lors que

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
- $(\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

On ajoute la stabilité par union dénombrable.

Remarque Les σ-algèbres sont des algèbres de Boole.

Exemples.

- $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre et une σ-algèbre.
  C'est la plus grande ($\subseteq$) algèbre.

- $\{\emptyset, X\}$ est la plus petite algèbre.

⋮

Définition. On appelle $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

Exemples (suite).

- $\{A \in \mathcal{P}(X) \mid A$ est finie ou A^c est finie$\}$ est une algèbre mais pas nécessairement une σ-algèbre.

- $\{A \in \mathcal{P}(X) \mid A$ est dénombrable ou A^c est dénombrable$\}$ est une σ-algèbre.

Proposition. Toute intersection de tribus (i.e. de σ-algèbres) est une tribu. ■

Définition. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ alors il existe une unique plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, la tribu engendrée par $\mathcal{C}$:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \text{ tribu}}} \mathcal{A}.$$

Définition. La tribu borélienne est la tribu engendrée par les ouverts de X :

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$$

avec

$$\mathcal{O} = \{ O \subseteq X \mid O \text{ est un ouvert} \}.$$

Exemple.

Sur $\mathbb{R}$,
- $\mathcal{B}(X)$ est engendrée par les fermés de $\mathbb{R}$;
- tous les ouverts de $\mathbb{R}$ peuvent être écrits comme union dénombrable d'intervalles ouverts.

Ainsi, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{intervalles ouverts}) = \sigma(\text{intervalles fermés})$.

En effet, on a :

$$[a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a-\tfrac{1}{n} ; b+\tfrac{1}{n}[$$

et $$]a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+\tfrac{1}{n} , b-\tfrac{1}{n}]$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{[a,b[\mid a \leq b\}) \\ &= \sigma(\{[a,+\infty[\mid a \in \mathbb{R}\}).\end{aligned}$$

II. Mesures (positives).

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

Définition. Une mesure (positive) est une application

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}_+}$$

telle que

- $\mu(\emptyset) = 0$
- pour toute suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ de parties deux à deux disjointes,

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).}_{\sigma\text{- additivité.}}$$

Remarque : La condition $\mu(\emptyset) = 0$ est nécessaire car

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots) \\ &= \mu(A) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\emptyset). \end{aligned}$$

Définition. Une mesure est finie si $\mu(X) < +\infty$.

. Une mesure est σ-finie si

si $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$,

alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu(X_k) < +\infty$.

- On dit que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Remarque. On a l'additivité :

si $A \cap B = \emptyset$

alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Exemples :

→ La mesure nulle $\mu = 0$ est une mesure

→ La mesure de comptage

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$
$$A \longmapsto \begin{cases} \text{card } A & \text{si } A \text{ fini,} \\ \infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une mesure.

→ La mesure de Dirac en $x \in X$

$$\begin{aligned} \delta_x : \mathcal{A} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A(x) \end{aligned}$$

est une mesure.

→ La mesure de Lebesgues : il existe une unique mesure μ_L sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que

$$\mu([a,b]) = b - a.$$

Proposition. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

(1) Si $A, B \in \mathcal{A}$, tels que $A \subseteq B$. alors

$$\mu(A) \leq B. \quad \rightsquigarrow \text{monotonie.}$$

(car $B = A \overset{\text{union disjointe}}{\sqcup} (B \setminus A)$, et additivité)

(2) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors

$$\mu\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad \rightsquigarrow \text{sous-additivité.}$$

preuve :

Soit $B_i = A_i \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{i-1})$,

alors

$$\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

et
$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i)$$
$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i)$$
$$\leq \sum_i \mu(A_i)$$

□

Proposition (propriétés de la continuité)

(1) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille croissante d'ensembles mesurables

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$

preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$
et $B_0 = A_0$.

On a $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. D'où, par σ-additivité, on a :

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(B_i)$$

par les propriétés des sommes dénombrables

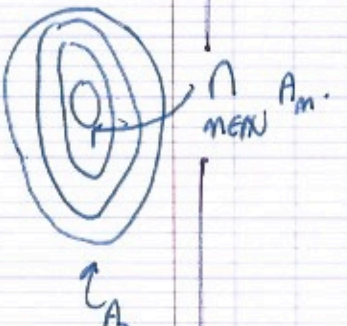
Or, $\sum_{i=0}^{n} \mu(B_i) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) = \mu(A_i)$,

d'où, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$ □.

(2) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissante d'ensembles mesurables telle que $\mu(A_0) < \infty$, alors $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$.

⚠ Si $\mu(A_0)=\infty$ alors ce n'est pas vrai.
Par exemple, $A_n=[n,+\infty[$,
alors $\mu(A_n)=\infty$
mais $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)=\mu(\emptyset)=0$.

preuve. On pose $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$.
Alors les B_i et $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ sont deux à deux disjoints, d'où



$$A_n=\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \sqcup \Big(\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\Big),$$

d'où,

$$\mu(A_n)=\mu\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big)+\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j)$$

Comme $\mu(A_0)<\infty$, $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j)$ converge,
d'où

$$\sum_{j\geq n} \mu(B_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On en conclut que $\mu(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big)$. □

III. Fonctions mesurables.

Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux ensembles mesurables et $f : X \longrightarrow Y$.

Définition On dit que f est mesurable si

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Exemple La fonction $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si A est mesurable.

Proposition. Si $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ et $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ alors f est mesurable si et seulement si

$$\forall C \in \mathcal{C}, \quad f^{-1}(C) \in \mathcal{A}. \qquad (*)$$

preuve. "$\Rightarrow$" vrai car $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$.

"$\Leftarrow$" On suppose $(*)$, et on pose

$$S = \{ B \in \mathcal{P}(X) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}.$$

C'est la tribu image de $\mathcal{A}$ par f.
↳ à démontrer.

Or, par $(*)$, $\mathcal{C} \subseteq S$ donc $\underset{\mathcal{B}.}{\underset{\shortparallel}{\sigma(\mathcal{C})}} \subseteq S$.

On en conclut que f est mesurable. □

Remarque. En général, si $f : X \longrightarrow Y$ avec l'ensemble Y un espace topologique, on prendra $(Y, \mathcal{P}(Y))$ comme espace mesurable.

Dans ce cas, f est mesurable si, et seulement si, pour tout ouvert $O \subseteq Y$,

$$f^{-1}(O) \in \mathcal{A}.$$

Remarque. Dans le cas particulier où

$$f : (X, \mathcal{B}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y)),$$

mesurable, alors on dit que la fonction f est borélienne.

Une application continue de $(X, \mathcal{B}(X))$

dans $(Y, \mathcal{B}(Y))$ est borélienne.

En effet, f est continue si

$\forall O$ ouvert, $f^{-1}(O)$ est un ouvert.

Proposition Si $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$
et $g : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$
sont mesurables, alors
$g \circ f : (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C})$
est mesurable.

preuve. Il suffit de constater que

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(\mathcal{C})}_{\subseteq \mathcal{B}.}) \subseteq \mathcal{A}$$

□

Proposition. Si $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (Y, \mathcal{B}(Y))$ est continue, alors f est mesurable (donc borélienne).

preuve. Comme les ouverts engendrent $\mathcal{B}(Y)$, il suffit de regarder $f^{-1}(V)$ où

$$V \subseteq \{ O \mid O \text{ est un ouvert de } Y \}.$$

Et, comme f est continue, $f^{-1}(V)$ est un ouvert, $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}(X)$.
D'où, f est mesurable. $\square$

Exemple (applications).

- Si $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable. alors
  - → $|f| : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable (par continuité de $|\cdot|$);
  - → $f_+ = \max(f, 0)$ est mesurable $\hookrightarrow$ partie positive de f;
  - → $f_- = \max(-f, 0)$ est mesurable $\hookrightarrow$ partie négative de f;

$$f = f_+ - f_- \quad \text{et} \quad |f| = f_+ + f_- .$$

→ $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont aussi mesurables;

- Si Y et Z sont des espaces topologiques alors $Y \times Z$ est un espace topologique avec des ouverts engendrés par les

$$U \times V \in \mathcal{O}(X) \times \underset{\hookrightarrow \text{ouverts}}{\mathcal{O}(Y)}.$$

Et, les applications

→ $$p_1 : Y \times Z \longrightarrow Y$$
$$(y, z) \longmapsto y$$

→ $$p_2 : Y \times Z \longrightarrow Z$$
$$(y, z) \longmapsto z.$$

sont continues. Ainsi, si l'application

$$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y \times Z, \mathcal{B}(Y \times Z))$$

est mesurable, alors $p_i \circ f = f_i$ est mesurable.

Proposition Si $f_1 : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$
et $f_2 : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

sont mesurables, alors

$$\begin{aligned} f : (X, \mathcal{A}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{n+d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+d})) \\ x &\longmapsto (f_1(x), f_2(x)) \end{aligned}$$

(petit abus de notations..)

est mesurable.

preuve Les ouverts de $\mathbb{R}^{n+d}$ sont engendrés par les produits d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^n$.

Donc, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$
et V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,
alors

$$f^{-1}(U \times V) = \underbrace{f_1^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)}_{\text{éléments de } \mathcal{A}.}$$

d'où, $f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{A}$, ainsi f est mesurable. $\square$

Exemples (application).

- Si f et $g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ sont mesurables, alors $f+g$ est mesurable, car
$$P : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$(x, y) \longmapsto x+y$$
est borélienne car continue.

De même,

→ $f-g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^d$

→ $f \times g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ⚠ pas $\mathbb{R}^d$

→ $f/g \times \underbrace{(\mathbb{1}_{\{0\}} \circ g)} : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$

⚠ On ne divise pas par zéro.

- Si $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ alors
$$f \text{ mesurable} \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f) \text{ est mesurable.} \\ \mathrm{Im}(f) \text{ est mesurable} \end{cases}$$

En effet :

→ pour "$\Rightarrow$", voir avant

→ car $f = Re(f) + Im(f) \times i$.

Si $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ alors

f est mesurable ssi f_+ et f_- le sont.

IV. Suites de fonctions mesurables.

<u>Définition</u> Sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

alors on définit

↑ engendré par $]a, \infty], a \in \mathbb{R}$

- une extension de la relation d'ordre " sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < +\infty$ et $-\infty < x$;

- une extension de l'addition:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} a + \infty &= +\infty, \\ a - \infty &= -\infty; \end{aligned}$$

- une extension de la multiplication:

$$\forall a \in \mathbb{R}_*^+ ,\ a \times (+\infty) = +\infty$$

$$0 \times (+\infty) = 0.$$

Proposition: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables, alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ et $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sont mesurables.

point par point:

preuve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(f_n(x)\right).$$

On utilise que $\overline{\mathbb{R}}$ est engendré par les intervalles $[-\infty, a[$.

- On a:

$$\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)^{-1}([-\infty, a[)$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{X} \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) < a \right\}$$

$$= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, a[).$$

- Et $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -(\sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n))$.

$\square$

Exemples (applications).

→ On a : $\limsup_{n \to +\infty} f_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} f_k$.

est mesurable si les f_n sont mesurables.

→ On a : $\liminf_{n \to +\infty} f_n = \sup_{n \geq 0} \inf_{k \geq n} f_k$.

est mesurables si les f_n sont mesurables.

→ En posant

$$F = (\liminf f_n, \limsup f_n),$$

et $\Delta = \{(a,a) \mid a \in \overline{\mathbb{R}}\} \underset{\substack{\text{fermé} \\ \text{donc borélien}}}{\subseteq} \overline{\mathbb{R}}^2$,

alors F est mesurable :

$$S = \{x \in X \mid \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\}$$
$$= F^{-1}(\Delta).$$

→ En posant

$$A = \{x \in X \mid \lim_{n \to \infty} f_n \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$$

$$= S \cap (\liminf f_n)^{-1}(\mathbb{R}) \cap (\limsup f_n)^{-1}(\mathbb{R})$$

$$= S \cap (\limsup f_n)^{-1}(\mathbb{R}),$$

d'où $\mathbb{1}_A \times (\lim f_n)$ est mesurable.

Chapitre 2

Intégration de Lebesgue.

On pose $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
On veut définir :

$$\int_X f(x)\, \mu(dx) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$
$$= \int_X f\, d\mu.$$

I. Fonctions étagées.

Définition. On dit que $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ est étagée ou (simple) si

→ f est mesurable,

→ f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Exemples: $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{1}_{[0,1]}$

Remarque. On écrira f une fonction étagée comme

$$f = \sum_{\lambda \in f(X)} \lambda \mathbb{1}_{\{f=\lambda\}}$$

où $\{f=\lambda\} = \{x \in X \mid f(x)=\lambda\} = f^{-1}(\{\lambda\})$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$$

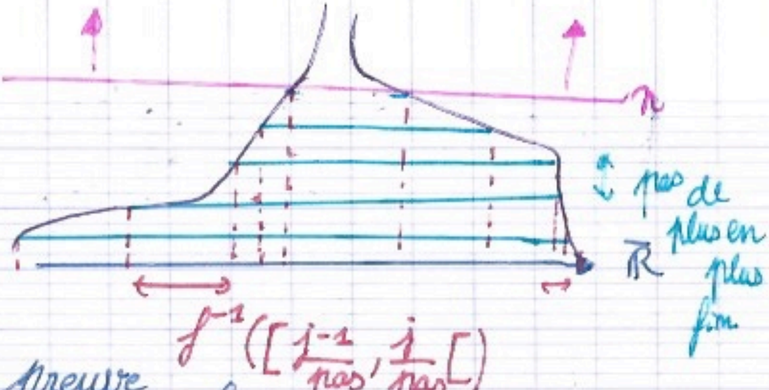
où les A_i sont disjoints 2 à 2 et $X = \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} A_i$.

Dans le premier cas, on dit que f est sous forme canonique.

Proposition Toute fonction mesurable

$$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

est limite croissante de fonctions étagées.



preuve

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n = n\, \mathbb{1}_{f^{-1}([n,+\infty])} + \sum_{j=1}^{n \cdot 2^n} \frac{j-1}{2^n}\, \mathbb{1}_{f^{-1}([\frac{j-1}{2^n};\frac{j}{2^n}[)}.$$

On a :

→ $f_0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$

→ $\forall x \in X,\ f_n(x) \longrightarrow f(x).$

En effet:

(1) Si $f(x) = +\infty$, alors $f_n(x) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(2) si $f(x) < +\infty$, alors dès que $f(x) \leq n$

alors

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

$\square$

Définition. Si $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$ est une fonction étagée, sous forme canonique, alors on définit

$$\int_X f(x)\, \mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mu(A_i)$$

Lemme Si f et g sont mesurables alors

$$\int_X (f+g)(x)\, \mu(dx)$$

$$= \int_X f(x)\, \mu(dx) + \int_X g(x)\, \mu(dx).$$

preuve On écrit $f = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$

et $g = \sum_{j\in J} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$.

alors

$$f+g=\sum_{(i,j)\in K}(\alpha_i+\beta_j)\ \mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

où $K=\{(i,j)\in I\times J \mid A_i\cap B_j\neq\emptyset\}$.

Soit $\Lambda=\{\alpha_i+\beta_j \mid (i,j)\in K\}$

alors

$$f+g=\sum_{\lambda\in\Lambda}\lambda\sum_{(i,j)\in K_\lambda}\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

où $K_\lambda=\{(i,j)\in K \mid \alpha_i+\beta_j=\lambda\}$.

$\subseteq 4$

On en conclut :

$$f+g=\sum_{\lambda\in\Lambda}\lambda\ \mathbb{1}_{\left(\bigcup_{(i,j)\in I_\lambda}(A_i\cap B_j)\right)}$$

sous forme canonique.

39

Par définition,

$$\int_X (f+g)(x)\ \mu(dx)$$

$$= \sum_{\lambda \in \Delta} \lambda\ \mu\Big(\bigcup_{(i,j)\in K_\lambda} (A_i \cap B_j)\Big)$$

par σ-additivit
de μ

$$= \sum_{\lambda \in \Delta} \lambda \sum_{(i,j)\in K_\lambda} \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{(i,j)\in K} (\alpha_i + \beta_j)\ \mu(A_i \cap B_j)$$

$\mu(\emptyset)=0$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} (\alpha_i + \beta_j)\ \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_i\ \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{(i,j)\in I\times J} \beta_j\ \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i\in I} \alpha_i \sum_{j\in J} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j\in J} \beta_j \sum_{i\in I} \mu(A_i \cap B_j)$$

par
σ-additiv

$$= \sum_{i \in I} \alpha_i \, \mu(A_i) + \sum_{j \in J} \beta_j \, \mu(B_j).$$

$$= \int_X f(x) \, \mu(dx) + \int_X g(x) \, \mu(dx). \qquad \square$$

pas forcément sous forme canonique

Proposition Si $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et A_i mesurable, alors

$$\int_X f(x) \, \mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mu(A_i).$$

preuve : Par additivité,

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} \, d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \mu(A_i). \qquad \square$$

Proposition Si $f \leq g$ étagées, alors

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu .$$

__preuve__ Il existe $((C_i, \lambda_i, \sigma_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ telle que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{C_i} \text{ et } g = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \mathbb{1}_{C_i}.$$

Alors, comme $f \leq g$, on a
$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad 0 < \lambda_i \leq \sigma_i$

d'où,

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(C_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \, \mu(C_i) = \int g \, d\mu.$$

□

__Proposition__

$\forall \lambda \geq 0, \quad \int \lambda f \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$

__preuve__ Immédiat par la définition de $\int \cdot \, d\mu$

□

__II Intégrales de fonctions positives.__

On pose $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré,
et $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable.

On définit

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \sup\left\{\int g\,d\mu \;\middle|\; \begin{array}{l} g \text{ étagée} \\ g \leq f \end{array}\right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ ,$$

et, si $A \in \mathcal{A}$, on définit

$$\int_A f\,d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f\,d\mu .$$

Remarque

- La définition est compatible avec l'intégrale de fonctions étagées.

- On dit que f est intégrable si f est mesurable et $\int f\,d\mu < +\infty$.

"Tchebychev"

Proposition (Inégalité de Чебышёв)

Si $\alpha > 0$, alors

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) = \frac{1}{\alpha}\int_X f\,d\mu .$$

Remarque On l'appelle aussi inégalité de Марков (Markov).

preuve On a $g = \alpha \mathbb{1}_{\{f \geqslant \alpha\}} \leqslant f$,
d'où, par définition,

$$\int_X g \, d\mu = \alpha \mu(\{f \geqslant \alpha\}) \leqslant \int_X f \, d\mu. \quad \square$$

Corollaire Si f est intégrable

$$\mu(\{f = +\infty\}) = 0.$$

preuve Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\{f \geqslant n\}) \leqslant \frac{1}{n} \int f \, d\mu$,

$$\begin{aligned} \text{donc } \mu(\{f = +\infty\}) &= \mu\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f \geqslant n\}\Big) \\ &\overset{\text{continuité des mesures}}{=} \lim_{n \to \infty} \mu(\{f \geqslant n\}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Proposition Si $f \leqslant g$ sont des fonctions mesurables de la forme $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}^+}$,
alors

$$\int_X f \, d\mu \leqslant \int_X g \, d\mu.$$

<u>preuve</u> Si h est étagée telle que $h \leq f$ alors

$$\int_X h \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

par hypothèse & par définition de l'intégrale.

D'où, par sup, on a

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu. \quad \square$$

Théorème (convergence monotone / Beppo-Levi)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante* de fonctions mesurables $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}^+$.

Alors si $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$, on a

$$\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} \int f \, d\mu.$$

et f est mesurable.

---

* Autrement dit, $f_{n+1} \geq f_n$.

preuve On procède par double inégalité.

(≤) Comme $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$,
on a,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$$

$$\text{d'où } \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

(≥). Soit g étagée telle que $0 \leq g \leq f$:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

Soit $\theta \in]0, 1[$. On pose

$$E_n = \{ x \in X \mid f_n \geq g \cdot \theta \}$$

Par croissance des (f_n), on a $E_n \subseteq E_{n+1}$.
De plus, par mesurabilité de f_n et g,
E_n est mesurable.

De plus, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ car, si $x \in X$,

$$\theta g(x) \leq f(x) \text{ et } f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

alors, à partir d'un certain rang,

$$\theta g(x) \leq f_n(x).$$

Or, $\mathbb{1}_{E_n} \theta g \leq f_n \leq f$

donc $\theta \int_{E_n} g \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq \lim \int_X f_n \, d\mu$ (*)

$\uparrow$ par $(\leq)$.

Or, $\int_{E_n} g \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \mu(E_n \cap A_i)$,

Or, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A_i) = A_i$ et donc

$$\mu(E_n \cap A_i) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu(A_i)$$

par continuité des mesures.

D'où, $\int_{E_n} g \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_X g \, d\mu$.

Enfin, par $(*)$,

$$\theta \int_X g \, d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

On fait tendre $\theta \to 1$ puis on utilise la définition de $\int_X f \, d\mu = \sup \underbrace{\left\{ \int_X g \, d\mu \,\middle|\, \begin{matrix} g \text{ étagée} \\ g \leq f \end{matrix} \right\}}_{\substack{\Psi \\ g}}$.

$\square$

Exemple (Applications)

➡ Si $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurables et $\lambda \geq 0$, alors

→ $\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Prendre } g_n \text{ étagée telle que } g_n \to f \\ \int \lambda g_n \, d\mu \to \int \lambda f \, d\mu \\ \quad \overset{\shortparallel}{\lambda} \int g_n \, d\mu \to \lambda \int f \, d\mu. \end{array} \right)$$

→ $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$.

→ $\int (\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n) \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu$

(On pose $g_N = \sum_{n \leq N} f_n$
et on a bien l'additivité)

➡ Si $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable
alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A &\mapsto \int_A f \, d\mu \end{aligned}$$

est une mesure.

Lemme (de Fatou)

Soient (f_n) mesurables, alors

$$\int (\liminf_{n \to \infty} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

preuve On prend $g_n = \inf_{k \leq n} f_k$

La suite (g_n) est croissante donc

par convergence monotone,

$$\int_X g_n \, d\mu \longrightarrow \int_X \lim g_n \, d\mu$$

$$= \int_X \liminf f_n \, d\mu.$$

Or, $f_n \geq g_n$ d'où, $\int f_n \, d\mu \geq \int g_n \, d\mu$,

donc

$$\liminf_{n \to \infty} \int g_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

$$\rotatebox{90}{=}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X (\liminf_{n \to \infty} f_n) \, d\mu$$

$\square$

<u>Remarque</u> Il n'y a pas forcément égalité dans le lemme précédent.

En effet, avec $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Et, pour la mesure de Lebesgues, on a

$$\int f_n \, d\mu = 1 \quad \text{mais} \int 0 \, d\mu = 0.$$

Remarque Si $f_n \to f$ alors

$$\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

III. Intégrales de fonctions réelles & complexes.

Définition. Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f est intégrable si

- → f est mesurable ;
- → $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

Dans ce cas, on pose $f_+ = \max(0, f) \leq |f|$

et $f_- = (-f)_+ \leq |f|$

et on définit

$$\int f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1((X, \mathcal{A}, \mu), \mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables.

On note aussi $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$.

Si μ est la mesure de Lebesgue,

on notera simplement $\mathcal{L}^1(X)$.

Remarque Pour $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$, on définit

$$\int_X f\,d\mu = \int_X (\mathrm{Re}\, f)\,d\mu + i\int_X (\mathrm{Im}\, f)\,d\mu$$

Pour $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^d$, on définit

$$\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{d} \left(\int_X f_i\,d\mu\right)$$

$$\text{où } f_i : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\underbrace{f(x)}_{\mathbb{R}^d})_i .$$

Proposition Si $f, g \in \mathcal{L}^1((X,\mu), \mathbb{R})$, (ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$), alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$),

$\to \lambda f + g \in \mathcal{L}^1((X,\mu), \mathbb{R})$

$$\text{et } \int_X (\lambda f + g)\,d\mu = \lambda \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

→ si $f \leq g$ alors

$$\int_X f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$

→ $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$

$\square$

Théorème (de la convergence dominée)

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ et qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ telle que

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq g$

et $\lim f_n = f$ existe. Alors

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f d\mu.$$

preuve

- $\int |f_n| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty$ donc les f_n sont intégrables.

De plus, f est mesurable comme limite de fonctions mesurables.

Comme $|f_n| \leq g$ et $f_n \to f$, on a $|f| \leq g$.
d'où f est intégrable..

- $k_n = 2g - |f_n - f| \geq 0 \xrightarrow[n \to \infty]{} 2g$

car $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$.

Par le lemme de Fatou,

$$\int_X 2g \, d\mu \leq \liminf \int (2g - |f - f_n|) \, d\mu$$

$$\leq \int 2g \, d\mu - \limsup \int |f_n - f| \, d\mu$$

donc $\limsup \int |f_n - f| \, d\mu \leq 0$

Et donc

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \leq \int |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0 .$$

$\square$

__Définition__ On dit que P. une propriété est vraie presque partout si elle est vraie sauf sur un ensemble de mesure nulle.

$$\mu\left(\{x \in X \mid \text{non } P(x)\} \right) = 0 .$$

On écrira alors "P vraie μ-pp."

__Exemple__

(1) On a $f = g$ μ-pp si $\mu(\{f \neq g\}) = 0$

(2) Si f intégrable alors $f < +\infty$ μ-pp.

(3) Si $0 \leq f$ intégrable alors

$$f = 0 \ \mu\text{-pp} \iff \int f d\mu = 0.$$

En effet Чебышёв

"⇐" Par Чебышёв, si $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{f \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int f \, d\mu = 0$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \ \mu(\{f \geq \varepsilon\}) = 0$

et donc $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

"⇒" On suppose $f = 0$ μ-pp.
Alors si (f_n) est une suite croissante de fonctions étagées telle que $f_n \to f$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int f_n \, d\mu = 0$$

et donc $f_n = 0$ μ-pp. car f_n est étagée.

Et, comme, $f_n \to f$,

$$0 = \int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu = 0.$$

◆

<u>Remarque</u> Pour le théorème de la convergence dominée, il suffit de vérifier que :

$$\forall n, \ |f_n| \leq g \ \mu\text{-pp} \ \text{et} \ f_n \to f \ \mu pp.$$

Chapitre 3

Construction de mesures

I Existence et mesures extérieures.

Définition : Une fonction $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est une mesure extérieure si

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(croissance)

(ii) $\forall A, B \subseteq X, \ A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iii) $\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

(σ-sous-additivité)

Remarque : Les mesures ont les propriétés des mesures extérieures.

Définition : Dans $\mathbb{R}^d$, un pavé ouvert est un ensemble de la forme

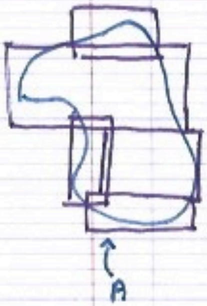
$$P = \prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[, \text{ où } b_i > a_i.$$

On définit son volume :

$$vol(P) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Définition Pour $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on pose

$$\mu_L^*(A) = \inf\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} vol(P_i) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i\in\mathbb{N},\ P_i \text{ est un pavé} \\ A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i \end{array} \right\},$$



la mesure extérieure de Lebesgue.

← approximation par des pavés.

Proposition : μ_L^* est bien une mesure extérieure.

preuve :

- $\mu_L^*(\emptyset) = 0$
- Si $A \subseteq B$, alors $\mu_L^*(A) \leq \mu_L^*(B)$
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$.

  On suppose $\forall n \in \mathbb{N}$; $\mu_L^*(A_n) < \infty$ **.

  Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite de pavés $(P_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ telle

---

** : Le cas où il existe n tel que $\mu(A_n) = +\infty$ se traite simplement.

que
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} vol(P_i^{(n)}) \leq \mu_L^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Ainsi,
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} vol(P_i^{(n)}) \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_L^*(A_n)\right) + \varepsilon$$

Or, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{(i,n)\in\mathbb{N}^2} P_{i_2}^{(n)}$, d'où

$$\mu_L^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_L^*(A_n) + \varepsilon$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. □

Définition : Un ensemble $A \subseteq X$ est μ^*-mesurable si

$$\forall E \subseteq X, \ \mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\setminus A).$$

Remarque : Quels que soient E et A, on a toujours
$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\setminus A).$$

Théorème (de Carathéodory) Si μ^* est une mesure extérieure sur X, alors

- $\mathcal{M}(\mu^*) = \{A \subseteq X \mid A \text{ est } \mu^*\text{-mesurable}\}$ est une tribu;
- μ^* est une mesure sur $(X, \mathcal{M}(\mu^*))$.

Pour démontrer ce théorème, on commence par prouver quelques lemmes.

Lemme (1) Si $A \subseteq X$ et $\mu^*(A) = 0$ ou $\mu^*(A^c) = 0$ alors $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

preuve (du lemme 1). Soit $E \subseteq X$ et on suppose $\mu^*(A) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} & \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(E \cap A) \\ \leq\ & \mu^*(A) + \mu^*(E) \quad \text{par croissance} \\ \leq\ & \mu^*(E). \end{aligned}$$

De même pour A^c. □

Lemme (2) $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une algèbre.

preuve (du lemme 2).

- $\mu^*(\emptyset) = 0$ donc $\emptyset \in \mathcal{M}(\mu^*)$ par le lemme 1.
- $A \in \mathcal{M}(\mu^*) \Leftrightarrow \forall E \subseteq X, \ \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E)$
  $\Leftrightarrow A^c \in \mathcal{M}(\mu^*)$
- Soient $A, B \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Soit $E \subseteq X$.
  Est-ce que $A \cup B \in \mathcal{M}(\mu^*)$. ?

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \text{car } A \in \mathcal{M}(\mu^*) \\
&= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \\
&\quad + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \quad \text{car } B \in \mathcal{M}(\mu^*) \\
&= \mu^*(E \cap (A \cup B) \cap A) \\
&\quad + \mu^*(E \cap (A \cup B) \cap A^c) \\
&\quad + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \\
&= \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \\
&\qquad \text{car } A \in \mathcal{M}(\mu^*).
\end{aligned}$$

d'où $A \cup B \in \mathcal{M}(\mu^*)$. $\square$

Lemme (3) $\mathcal{M}(\mu^*)$ est stable par union dénombrable d'ensembles deux-à-deux disjoints.

preuve (du lemme 3) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X deux à deux disjoints. On supposera, pour $n\in\mathbb{N}$, A_n μ^*-mesurable.

Soit $E \subseteq X$.
On montre par récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mu^*(E) = \sum_{i=0}^{n} \mu^*(E\cap A_i) + \mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)^c\right).$$

- Le cas $n=0$ est vrai car $A_0\in\mathcal{M}(\mu^*)$.
- On suppose la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$, alors

$$\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)^c\right)$$

$$= \mu^*\left(E\cap \overbrace{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)^c \cap A_{n+1}}^{A_{n+1}}\right)$$

$$+ \mu^*\left(E\cap \underbrace{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)^c \cap A_{n+1}^c}_{\left(\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i\right)^c}\right)$$

donc
$$\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=0}^{n}A_i\right)^c\right)=\mu^*(E\cap A_{n+1})+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=0}^{n+1}A_i\right)^c\right).$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\mu^*(E)=\sum_{i=0}^{n}\mu^*(E\cap A_i)+\left(\mu^*(E\cap A_{n+1})+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=0}^{n+1}A_i\right)^c\right)\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{n+1}\mu^*(E\cap A_i)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=0}^{n+1}A_i\right)^c\right),$$

Par croissance de μ^*, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mu^*(E)\geq\sum_{i=0}^{n}\mu^*(E\cap A_i)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)^c\right)$$

et, par passage à la limite $n\to+\infty$, on a :

$$\mu^*(E)\geq\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu^*(E\cap A_i)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)^c\right)$$

(*)
$$\geq\mu^*\underbrace{\left(E\cap\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)}_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(E\cap A_i)}+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)^c\right)$$

par σ-sous-additivité de μ^*.

On a égalité car μ^* est une mesure extérieure. □

preuve (du théorème).

- $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une algèbre d'après le lemme 2;
- Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{M}(\mu^*)$, alors

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \Big(A_i \setminus \bigcup_{k<i} A_k\Big)$$

donc $\mathcal{M}(\mu^*)$ est stable par union dénombrable.
On en déduit que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu.

Montrons que μ^* est une mesure sur $(X, \mathcal{M}(\mu^*))$.

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{M}(\mu^*)$ deux-à-deux disjoints, en prenant $E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ dans (*) (c.f. preuve lemme 3), on a:

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i).$$

□

Corrolaire : La mesure extérieure de Lebesgue μ_L^* est une mesure sur $\underbrace{(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}(\mu_L^*))}_{\text{tribu de Lebesgue}}$. □

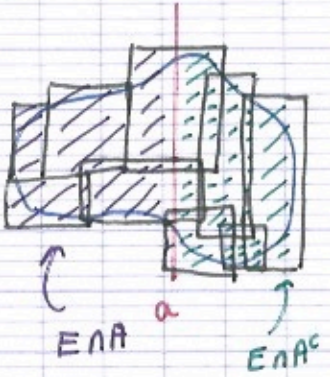
Proposition : On a : $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}(\mu_L^*)$.
et donc μ_L^* définit une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

preuve: On pose $A =]-\infty, a] \times \mathbb{R}^{d-1}$, puis, par symétrie, on fait de même pour les autres coordonnées. Cela donne un ensemble qui génère $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Vérifions que A est mesurable.
Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$. On prend des pavés P_i tels que $E \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$.

Alors $E \cap A$ est recouvert par les $P_i \cap A$

et $E \cap A^c$ est recouvert par les $P_i \cap A^c$.



Pour avoir des pavés ouverts, on augmente la taille des $P_i \cap A^c$ de $\varepsilon/2^{i+1}$.

Par définition de μ_L^*, on a donc :

$$\mu_L^*(E\cap A) + \mu_L^*(E\cap A^c) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(P_i) + \varepsilon$$
$$\leq \mu^*(E) + \varepsilon,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.
On conclut en prenant $\varepsilon \to 0$.

Donc $A \in \mathcal{M}(\mu_L^*)$.

Comme les ensembles de cette forme génèrent les boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathcal{M}(\mu_L^*)$ est une tribu, on en conclut

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}(\mu_L^*).$$

□

II Unicité et classes monotones.

Définition : Une classe monotone (ou λ-système) sur X est un ensemble $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tel que :

- $X \in \mathcal{N}$;
- si $A \subseteq B$ sont dans $\mathcal{N}$ alors $B \setminus A \in \mathcal{N}$;
- si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{N}$, alors

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{N}.$$

Remarque :
- Les tribus sont des classes monotones.
- Une classe monotone est une tribu si, et seulement si, elle est stable par intersections finies.

  En effet, si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de $\mathcal{N}$ alors

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\underbrace{\bigcap_{j=0}^{n} A_j^c}_{}\Big)^c$$

  et $A \in \mathcal{N} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{N}$.
- L'intersection de classes monotones est une classe monotone.

Définition Pour $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, on définit sa classe monotone engendrée

$$\underline{\underline{m(\mathcal{C})}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{N} \text{ classe monotone} \\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}}} \mathcal{N}.$$

Lemme (des classes monotones) Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est stable par intersections finies, alors

$$m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}).$$

Exemple : On peut choisir $\mathcal{C}$ l'ensemble des pavés, par exemple, et on a donc

$$m(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}).$$

preuve : • Toute tribu est une classe monotone, d'où,

$$m(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}).$$

• Montrons l'inclusion réciproque, pour cela, il suffit de montrer que $m(\mathcal{C})$ est stable par intersection finie, car alors $m(\mathcal{C})$ serait une tribu donc inclus dans la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Montrons d'abord que si $C \in \mathcal{C}$, alors

$$\forall A \in m(\mathcal{C}), \quad C \cap A \in m(\mathcal{C}). \qquad (*)$$

Posons $\mathcal{N}_1 = \{A \in m(\mathcal{C}) \mid A \cap C \in m(\mathcal{C})\} \subseteq m(\mathcal{C})$

→ On a que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_1$ car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $\mathcal{C} \subseteq m(\mathcal{C})$

→ Montrons que $\mathcal{N}_1$ est une classe monotone.

• Soient $A, B \in \mathcal{N}_1$ tels que $A \subseteq B$, donc $B \setminus A \in m(\mathcal{C})$.

De plus, $(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap C)$, or $B \cap C$ et $A \cap C$ sont deux éléments de $m(\mathcal{C})$ par définition de $\mathcal{N}_1$, et

$$(A \cap C) \subseteq (B \cap C),$$

d'où $(B \setminus A) \cap C \in m(\mathcal{C})$ et donc $B \setminus A \in \mathcal{N}_1$.

- On a $X \in \mathcal{N}_1$.
- Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{N}_1$ alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in m(\mathcal{C})$.

D'où,

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \cap C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overbrace{(A_i \cap C)}^{\in m(\mathcal{C})} \in m(\mathcal{C})$$

donc $\mathcal{N}_1$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{C}$, d'où $m(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{N}_1$.

On en conclut que $\mathcal{N}_1 = m(\mathcal{C})$ d'où $(*)$.

→ Soit $B \in m(\mathcal{C})$. On pose

$$\mathcal{N}_2 = \{ A \in m(\mathcal{C}) \mid A \cap B \in m(\mathcal{C}) \} \subseteq m(\mathcal{C})$$

Par $(*)$, on sait que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_2$.
De même que pour $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ est une classe monotone, d'où $m(\mathcal{C}) = \mathcal{N}_2$.

On en conclut que :

$$\forall A, B \in m(\mathscr{C}), \quad A \cap B \in m(\mathscr{C}).$$

$\mathscr{C}$ est donc une tribu, d'où l'inclusion réciproque.

$\square$

On applique ce lemme pour démontrer l'unicité des mesures.

__Proposition :__ Soient μ et ν deux mesures sur un ensemble mesurable $(X, \mathcal{A})$.
On suppose que μ et ν soient égales sur un ensemble $\mathscr{C} \subseteq \mathcal{A}$ tel que

- $\mathscr{C}$ est stable par intersections finies ;
- $\sigma(\mathscr{C}) = \mathcal{A}$;
- il existe $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de $\mathscr{C}$ telle que

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k \text{ et } \forall k, \mu(X_k) < +\infty;$$

($(X, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-finie)

alors, $\nu = \mu$.

__preuve :__ On suppose $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$ et on pose

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = \nu(A)\} \supseteq \mathscr{C}.$$

De plus, $\mathcal{N}$ est une classe monotone. En effet :

- $\rightarrow X \in \mathcal{N}$
- $\rightarrow$ si $A \subseteq B$ dans $\mathcal{N}$ alors

$$\mu(B \setminus A) \overset{A \subseteq B}{=} \mu(B) - \mu(A)$$
$$\overset{\text{car } A,B \in \mathcal{N}}{=} \nu(B) - \nu(A)$$
$$\underset{\text{car } A \subseteq B}{=} \nu(B \setminus A)$$

Ici, on peut avoir $\mu(B \setminus A) < +\infty$ avec $\mu(A) = \mu(B) = +\infty$.

- $\rightarrow$ si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille croissante d'éléments de $\mathcal{N}$, alors

$$\mu\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\Big) \xleftarrow[i \to \infty]{} \mu(A_i) = \nu(A_i) \xrightarrow[i \to \infty]{} \nu\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\Big)$$

par continuité des mesures.

D'où, $m(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{N}$, et, par le lemme des classes monotones

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}) = m(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}.$$

D'où, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \mu(A)$ $\square$.

Remarque Si X est σ-fini, on applique la preuve pour tout X_k et on conclut.

Corollaire : La mesure μ_ℓ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\mu_\ell\left(\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$$

est unique. On la nomme mesure de Lebesgue.

preuve : l'ensemble $\mathcal{C}$ des pavés engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, et est stable par intersection finie.
De plus, $X_k = [-k, k]^d$ vérifie $\mu(X_k) < +\infty$
et

$$X = \mathbb{R}^d = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k.$$

□

Exemples (d'application)

- La mesure de Lebesgue est invariante par translation :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \ \mu_\ell(x+A) = \mu_\ell(A)$$

- Si μ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
  - ⟶ invariante par translation ;
  - ⟶ finie sur les compacts ;

alors $\mu = c \cdot \mu_{\mathcal{L}}$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

III Complétion de mesure.

Définition Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un ensemble mesuré.
On note

$$\mathcal{N}_\mu = \left\{ A \subseteq X \,\middle|\, \exists B \in \mathcal{A}, \begin{smallmatrix} \mu(B) = 0 \\ A \subseteq B \end{smallmatrix} \right\}.$$

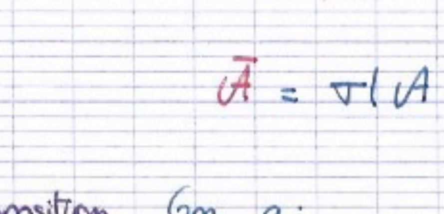
l'ensemble des parties négligeables.
La tribu complétée de $\mathcal{A}$ est définie par :

$$\bar{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu).$$

Proposition On a :

$$\bar{\mathcal{A}} = \left\{ A \subseteq X \,\middle|\, \exists (B, B') \in \mathcal{A}^2, \begin{smallmatrix} B \subseteq A \subseteq B' \\ \mu(B' \setminus B) = 0 \end{smallmatrix} \right\}$$

et μ se prolonge de manière unique sur $\bar{\mathcal{A}}$.



preuve : • Soit $\mathcal{A}'$ l'ensemble de la proposition.

On vérifie que $\mathcal{A}'$ est une tribu.

Or, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ et $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{A}'$

si $A \in \mathcal{A}$ on prend $A = B = B'$.

on prend $B = \emptyset$
on a bien $A \subseteq B'$
et $\mu(B') = 0$

d'où $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu) = \bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}'$.

• Soient $A \in \mathcal{A}'$ et $(B, B') \in \mathcal{A}^2$ tels que

$$B \subseteq A \subseteq B'$$

et

$$\mu(B' \setminus B) = 0$$

Alors, $A = B \cup (A \setminus B)$ et $A \setminus B \subseteq B' \setminus B$ de mesure nulle.

d'où $A \setminus B \in \mathcal{N}_\mu$.

Ainsi, $A \in \sigma(\mathcal{N}_\mu \cup \mathcal{A}) = \bar{\mathcal{A}}$.

On en conclut que $\mathcal{A}' \subseteq \bar{\mathcal{A}}$, d'où $\mathcal{A}' = \bar{\mathcal{A}}$.

• Pour $A \in \bar{\mathcal{A}}$, on a donc $(B, B') \in \mathcal{A}^2$ tels que $B \subseteq A \subseteq B'$ et $\mu(B' \setminus B) = 0$.

Ainsi,

→ si $\mu(B') < +\infty$, on définit

$$\mu(A) := \mu(B) \ (= \mu(B')).$$

→ si $\mu(B') = +\infty$, on définit

$$\mu(A) := +\infty.$$

Remarquons que la définition de $\mu(A)$ ne dépend pas de (B, B'). En effet, si $\tilde{B}, \tilde{B}' \in \mathcal{A}$ vérifient

$$\tilde{B} \subseteq A \subseteq \tilde{B}' \quad \text{et} \quad \mu(\tilde{B}' \setminus \tilde{B}) = 0,$$

alors, par monotonie, si $\mu(\tilde{B}') < +\infty$,

$$\mu(\tilde{B}) \leq \mu(B') = \mu(B) \leq \mu(\tilde{B}') = \mu(\tilde{B}).$$

- On vérifie que μ est bien une mesure sur $\mathcal{A}$. et donc que μ est unique. □

<u>Proposition</u> : La tribu de Lebesgue $\mathcal{M}(\mu_\ell^*)$ est la tribu complétée des <u>boréliens</u> :

$$\mathcal{M}(\mu_\ell^*) = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}.$$

preuve : • On a montré $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}(\mu_\ell^*)$.

On prend $A \in \mathcal{N}_{\mu_\ell}$. Alors il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tels que $A \subseteq B$ et $\mu_\ell(B) = 0$

Or, par croissance de μ_ℓ^*,

$$\mu_\ell^*(A) \leq \mu_\ell^*(B) = \mu_\ell(B) = 0$$

d'où $\mu_\ell^*(A) = 0$. et donc $A \in \mathcal{M}(\mu_\ell^*) \supseteq \mathcal{N}_{\mu_\ell}$.

On en conclut : $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \subseteq \mathcal{M}(\mu_\ell^*)$.

• Soit $A \in \mathcal{M}(\mu_\ell^*)$ borné (sinon on prend $A \cap]-N, N[^d$) donc $\mu(A) < +\infty$.

On recouvre A par des pavés $(P_i^{(n)})$ tels que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} vol(P_i^{(n)}) \leq \mu_\ell^*(A) + \frac{1}{2^n}.$$

On pose $B' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i^{(n)} \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

On a $A \subseteq B'$.

$$\text{et } \mu^*_\ell(A) \overset{A \subseteq B'}{\leq} \mu^*_\ell(B') \overset{B' \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^{(n)}}{\leq} \mu^*_\ell\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^{(n)}\Big)$$

σ-sous additivité

$$\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(P_i^{(n)})$$

$$\leq \mu^*_\ell(A) + \frac{1}{2^n}$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

D'où, $\mu^*_\ell(A) = \mu^*_\ell(B')$ avec $\begin{cases} A \subseteq B' \\ B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \end{cases}$

De même, $\mu^*_\ell(A) = \mu^*_\ell(B)$ avec $\begin{cases} B \subseteq A \\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \end{cases}$

(même construction en considérant $]-N,N[^d \setminus A$.)

D'où, $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \supseteq \mathcal{M}(\mu^*_\ell)$.

□

IV Propriétés de la mesure de Lebesgue.

Proposition (Régularité). Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\mu_\ell(A) = \inf\left\{ \mu_\ell(G) \;\middle|\; \begin{matrix} G \text{ ouvert} \\ A \subseteq G \end{matrix} \right\}$$

régularité extérieur

régularité intérieur

$$= \sup\left\{ \mu_\ell(K) \;\middle|\; \begin{matrix} K \text{ compact} \\ K \subseteq A \end{matrix} \right\}$$

preuve; Par monotonie, on a toujours

$$\sup\{\dots\} \underset{(1)}{\leq} \mu_\ell(A) \underset{(2)}{\leq} \inf\{\dots\}$$

- En supposant $\mu_\ell(A) < +\infty$ (sinon on a égalité en (1)), on recouvre A par des pavés $(P_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ avec

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(P_i^{(n)}) = \mu_\ell(A) + \frac{1}{2^n}.$$

On a bien que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^{(n)}$ est un ouvert contenant A.

$$\mu_\ell\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^{(n)}\Big) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(P_i^{(n)}) \leq \mu_\ell(A) + \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu_\ell(A$$

On laisse en exercice la démonstration de l'inégalité (2) et le passage au cas infini (non trivial). □

Liens entre intégrale de Riemann et Lebesgue.

Si $a < b$, alors $f : [a, b]$ est une fonction en escaliers s'il existe

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

une subdivision de $[a,b]$ en n intervalles, telle que f

est constante sur tous les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$.

On définit l'intégrale d'une fonction en escalier

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} y_i \,(x_i - x_{i-1})$$

où les y_i sont les valeurs de f sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée est dite Riemann-intégrable si

$$\inf \left\{ I(h) \,\middle|\, \begin{matrix} h \geq f \\ h \text{ en escalier} \end{matrix} \right\} = \sup \left\{ I(b) \,\middle|\, \begin{matrix} b \leq f \\ b \text{ en escalier} \end{matrix} \right\}.$$

Dans ce cas, on note ce nombre $I(f)$.

Proposition : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable alors f est mesurable pour $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})})$ et

$$I(f) = \int_{[a,b]} f(x)\, dx .$$

preuve: Si h_n et h_n' approchent le sup et l'inf alors on définit $g_n = \max_{k \le n} h_k$ et $g_n' = \min_{k \le n} h_k'$.

La suite (g_n) est croissante avec $g_n \le f$. Ainsi, $g_n \to g$ pour une certaine fonction $g \le f$. De même, $g_n' \to g'$ pour une certaine fonction $g' \ge f$.

De plus, g et g' sont mesurables telles que $g_0 \le g \le g' \le g_0'$. D'où, par convergence dominée

$$I(g_n) = \int g_n \longrightarrow \int g$$

même définition de l'intégrale pour les fonctions en escalier.

$$I(g_n') = \int g_n' \longrightarrow \int g'.$$

Par définition, $\lim_{n \to \infty} I(g_n) = \lim_{n \to \infty} I(g_n')$, d'où $\int g = \int g'$. Or, $g - g' \ge 0$ et $\int (g - g') = 0$, d'où $g = g'$ μ_L-presque partout. Et, $g \le f \le g'$ donc $g = f = g'$ μ_L-presque partout.

Ainsi, $f = g \mathbb{1}_{\{g = g'\}} + f \mathbb{1}_{\{g \neq g'\}}$ est mesurable.

On en conclut que f est intégrable et

$$\int f = \int g = \sup I(g_n) = \inf I(g_m') = I(f). \quad \square$$

Chapitre 4.

Espaces L^p.

Définition : Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$, on définit :

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ mesurable} \\ \int |f|^p d\mu < +\infty \end{array} \right\}$$

puis

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists C \geq 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq C \right\}.$$

Définition : On définit la relation d'équivalence

$$f \sim g \iff f = g \ \mu\text{-presque partout}$$

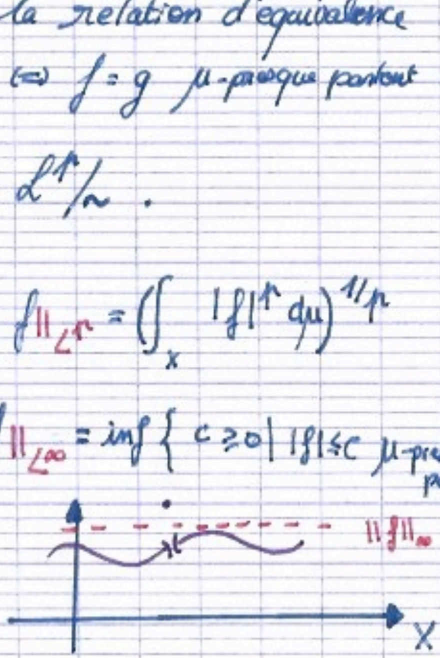
puis

$$L^p = \mathcal{L}^p / \sim .$$

Définition : On définit $\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

puis $\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ c \geq 0 \mid |f| \leq c \ \mu\text{-presque partout} \}$

supremum essentiel



I. Inégalités

Proposition (Inégalité de Jensen). Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et μ une mesure de probabilité.

↳ μ est positive et $\mu(X) = \int_X d\mu = 1$

Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe et $f : X \to I$ mesurable.

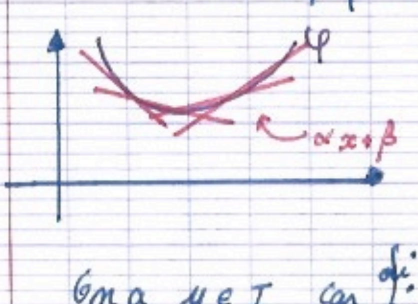
Si $\varphi \circ f$ est positive ou intégrable, alors

$$\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f \, d\mu .$$

preuve On pose a, b les extrémités de I.
La fonction φ est convexe donc

$$\varphi(x) = \sup\left\{ \alpha x + \beta \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \forall y \in I,\ \alpha y + \beta \leq \varphi(y) \end{array} \right\}$$

↳ caractérisation de la convexité.



On pose $y = \int_X f \, d\mu$.

On a $y \in I$ car
- on revient à la déf°
- ou on borne y et l'intégrale de 1 vaut 1
- ou par l'absurde, si $y > b$ alors $b - y = \int \underbrace{(b-f)}_{\geq 0} d\mu < 0$.

Soient α, β tels que

$$\forall z \in I, \quad \alpha z + \beta \leq \varphi(z).$$

Alors, $\alpha f(x) + \beta \leq \varphi(f(x))$
d'où, $\alpha y + \beta \leq \int \varphi \circ f \, d\mu$ en intégrant par rapport à μ. On en conclut en prenant le sup en α et β, pour avoir :

$$\varphi(y) = \varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f \, d\mu. \quad \square$$

Proposition (Inégalité de Hölder).

Si $p \in [1, \infty]$, on pose $p' = \frac{p}{1-p}$
avec $\begin{cases} p' = \infty \text{ si } p = 1, \\ p' = 1 \text{ si } p' = \infty, \end{cases}$
et donc $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$\uparrow$ l'exposant conjugué de p (de Hölder).

et si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables
alors

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \times \|g\|_{p'}.$$

85

preuve On peut supposer $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$.

- Si $p = +\infty$ alors $|fg| \leq \|f\|_{L^\infty} |g|$ μ-presque partout
donc $\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{L^\infty} \int g \, d\mu$.

- Si $p \in]1, +\infty[$ on utilise l'inégalité de Young pour le produit :

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

car $\exp(tu + (1-t)v) \leq te^u + (1-t)e$
avec $u = (\ln a)/t$
et $v = (\ln b)/1-t$

On prend
$a = |f| / \|f\|_{L^p}$
$b = |g| / \|g\|_{L^{p'}}$
et alors

$$\frac{|fg|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{|f|^p}{p \, \|f\|_{L^p}^p} + \frac{|g|^{p'}}{p' \, \|g\|_{L^{p'}}^{p'}},$$

d'où,

$$\frac{\int |fg| \, d\mu}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad \square$$

Exemple On a $(x \mapsto 1/x^{1/p}) \in \mathcal{L}^r([0,1])$ pour $r < p$,
" ---- $\in \mathcal{L}^r([1,\infty])$ pour $r > p$.

Proposition (Inégalité de Minkowski).

Soient f et g deux fonctions $X \to \mathbb{R}$ mesurables.
Si $p \in [1,\infty]$ alors
$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p} + \|g\|_{\mathcal{L}^p}.$$

preuve. On suppose $f, g \in \mathcal{L}^p$ et $\|f+g\|_{\mathcal{L}^p} \neq 0$.

- Si $p = \infty$ alors $|f| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$ et $|g| \leq \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}$ μ-pp.

  d'où, $|f+g| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}$ μ-pp.

  donc $f+g \in \mathcal{L}^\infty$. ($\mu(\{|f| \geq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty}\} \cup \{|g| \geq \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}\}) = 0$ car union de deux ensembles négligeables)

  En passant à l'infimun, on a : $\|f+g\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}$.

- Si $p \in [1, +\infty[$ alors $\left|\frac{f+g}{2}\right|^p \leq \frac{|f|^p + |g|^p}{2}$

  donc $\int |f+g|^p \, d\mu \leq 2^{p-1} \int (|f|^p + |g|^p) \, d\mu < \infty$.

  donc $f+g \in \mathcal{L}^p$ et

$$\int |f+g|^p \, d\mu \le \int |f+g|^{p-1} |f| \, d\mu + \int |f+g|^{p-1} \, |g| \, d\mu.$$

Par l'inégalité de Hölder et comme $(p-1)p' = p$

$$\int |f+g|^p \, d\mu \le \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p'} \|f\|_{L^p} + \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p'} \|g\|_{L^p}$$

Or, $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ donc $\|f+g\|_{L^p}^{p} \le \|f+g\|_{L^p}^{p-1} \left(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}^{p-1}\right)$

$= \frac{p-1}{p}$ d'où, $\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$. □

Corollaire. L^p est un espace vectoriel normé.

Proposition : Pour tout $p \in [1, +\infty]$, L^p est complet.
C'est donc un espace de Banach.

Remarque Pour $p=2$, on définit $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int fg \, d\mu$ qui est un produit scalaire sur L^2.

Ainsi, L^2 est un espace de Hilbert.

D'où, toutes les formes linéaires bornées sur L^2 sont de la forme $f \mapsto \int fg \, d\mu$ pour un certain $g \in L^2$, par le théorème de Riez.

<u>preuve</u> (de la proposition).

- Pour $p = \infty$, soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞.
  On pose
  $$A_{n,m} = \{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n(x) - f_m(x)\|_{L^\infty}\}.$$

  Alors, $\mu(A_{n,m}) = 0$ donc $\mu\left(\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} A_{n,m}\right) = 0$.

  Pour $x \in \left(\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} A_{n,m}\right)^c$,
  $$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{L^\infty},$$
  donc $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$,
  donc converge vers une valeur $f(x)$.
  Alors, en prenant $m \to +\infty$, on a
  $$|f_n(x) - f(x)| \leq \liminf_{m \to +\infty} \|f_n - f\|_{L^\infty}$$
  sur $\left(\bigcup_{n,m} A_{n,m}\right)^c$.

  On peut définir $f = 0$ sur $\bigcup_{n,m} A_{n,m}$,
  donc
  $$\|f_n - f\|_{L^\infty} \leq \underbrace{\liminf_{m \to +\infty} \|f_n - f_m\|_{L^\infty}}_{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ 0}}$$