DM n°5 – FDI

Hugo Salou

ENS DE LYON

9 avril 2025

1. Considérons un ensemble fini E. On montre, par récurrence sur $|E|$, que E est récursif primitif.
   - ▷ Dans le cas où $|E| = 0$, alors $E = \emptyset$ alors $\chi_E = \mathbf{0}$, où $\mathbf{0}$ est la fonction constante nulle.
   - ▷ Considérons $|E| = n+1$. Soit $x \in E$ et $E' := E \setminus \{x\}$. Par hypothèse de récurrence $\chi_{E'}$ est primitive récursive. En TD, on a vu que la construction « `if`...`then`...`else` »[1] (avec `true` représenté par 1 et `false` par 0) pouvait être réalisée par une fonction primitive récursive, on s'appuie donc sur cette construction. De même, le test d'égalité peut être réalisé (il suffit de calculer les deux quasi-différences dans $\mathbb{N}$ et de vérifier que les deux sont nulles). On a donc

$$\chi_E(y) = \texttt{if eq}(x, y)\ \texttt{then}\ \mathbf{1}(y)\ \texttt{else}\ \chi_{E'}(y).$$

   Ainsi, tout ensemble fini est récursif primitif.

   En notant $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, le raisonnement par récurrence donne la fonction primitive récursive :

$$\begin{aligned}\chi_E(y) = {} & \texttt{if eq}(x_1, y)\ \texttt{then}\ \mathbf{1}(x)\ \texttt{else} \\ & \texttt{if eq}(x_2, y)\ \texttt{then}\ \mathbf{1}(x)\ \texttt{else} \\ & \texttt{if eq}(x_3, y)\ \texttt{then}\ \mathbf{1}(x)\ \texttt{else} \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & \texttt{if eq}(x_n, y)\ \texttt{then}\ \mathbf{1}(x)\ \texttt{else} \\ & \mathbf{0}(x).\end{aligned}$$

   Montrons que P_k est récursif primitif en montrant que $k\mathbb{N}$ l'est. En TD, on a implémenté la fonction `div` calculant le quotient modulo un nombre précisé en argument, et `mult` calculant le produit. On pose donc

$$\chi_{k\mathbb{N}}(x) = \texttt{eq}(\texttt{mult}(\texttt{div}(x, k), k), x).$$

1. Pour la lisibilité, j'écrirais cette construction comme une commande, et non comme un appel à une fonction (c'est un petit abus de notations).

En effet, on a

$$x \in k\mathbb{N} \iff k \mid x \iff \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor \times k = x.$$

(On aurait aussi pu passer par la fonction `mod` définie en TD.)

2. Supposons A et B primitifs récursifs. Alors, les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et A^{C} le sont. En effet, on a :
   - ▷ $\chi_{A\cap B}(x) = \texttt{mult}(\chi_A(x), \chi_B(x))$;
   - ▷ $\chi_{A\cup B}(x) = \texttt{sub}(\texttt{add}(\chi_A(x), \chi_B(x)), \chi_{A\cap B}(x))$;
   - ▷ $\chi_{A^{\mathrm{C}}}(x) = \texttt{sub}(\mathbf{1}(x), \chi_A(x))$.

   Ces relations proviennent des relations entre fonctions indicatrices :

$$\begin{gathered} \chi_{A\cap B} = \chi_A \times \chi_B \\ \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} \\ \chi_{A^{\mathrm{C}}} = 1 - \chi_A \end{gathered}$$

   On en conclut que les ensembles primitifs récursifs sont clos par les opérations ensemblistes $\cap$, $\cup$ et $-^{\mathrm{C}}$.

3. On a

$$\begin{aligned} g(x) = {} & \texttt{if } \chi_{A_1}(x) \texttt{ then } f_1(x) \texttt{ else} \\ & \texttt{if } \chi_{A_2}(x) \texttt{ then } f_2(x) \texttt{ else} \\ & \texttt{if } \chi_{A_3}(x) \texttt{ then } f_3(x) \texttt{ else} \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & \texttt{if } \chi_{A_k}(x) \texttt{ then } f_k(x) \texttt{ else} \\ & f(x). \end{aligned}$$

   (La fonction définie en question 1 est un cas particulier où l'on a posé $A_i = \{x_i\}$ (et donc $\chi_{A_i}(x) = \texttt{eq}(x, x_i)$), $f_i = \mathbf{1}$ et $f = \mathbf{0}$, on retrouve ainsi la même fonction primitive récursive.) Formellement, on procède par récurrence sur k.
   - ▷ Pour $k = 0$, on pose $g = f$, qui est primitive récursive.

- ▷ Pour $k > 0$, on considère g' définie « cas par cas » (par hypothèse de récurrence) sur les k cas $((A_1, f_1), \ldots, (A_k, f_k))$, primitive récursive, et on a

$$g(x) = \texttt{if } \chi_{A_{k+1}}(x) \texttt{ then } f_{k+1}(x) \texttt{ else } g'(x),$$

  qui est aussi primitive récursive, d'où l'hérédité.

Ceci permet de conclure que les fonctions primitives récursives sont closes par schéma de définition par cas.