DM n°3 – FDI

Hugo Salou

ENS DE LYON

9 avril 2025

On nomme L le langage

$$L := \{\langle M\rangle \in \Sigma^\star \mid M \text{ s'arrête sur l'entrée } \langle M\rangle\}.$$

Nous allons démontrer que ce langage est

- ▷ indécidable (par réduction au langage de l'arrêt A_{TM} pour les machines de Turing) ;
- ▷ récursivement énumérable ;
- ▷ mais le complémentaire n'est pas récursivement énumérable.

On rappelle que le langage $A_{\mathsf{TM}} := \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ accepte } w\}$ est indécidable.

On pose la fonction

$$f : \begin{aligned} \Sigma^\star &\longrightarrow \Sigma^\star \\ \langle N, w\rangle &\longmapsto \langle M_{N,w}\rangle \end{aligned}$$

qui est calculable.

Machine $M_{N,w}$

Entrée Un mot $u \in \Sigma^\star$
 On simule N sur l'entrée w.
 si N accepte w **alors**
  On accepte.
 sinon
  On boucle à l'infini.

L'« implémentation haut niveau » de la machine $M_{N,w}$, donnée ci-dessus à droite, permet de construire une telle machine. En effet, l'étape « on simule N sur l'entrée w » se réalise à l'aide de la machine universelle, et le reste se fait simplement.

On remarque que $M_{N,w}$ s'arrête sur une entrée quelconque si, et seulement si, N accepte w.

Et, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} \langle M_{N,w}\rangle \in L &\iff M_{N,w} \text{ s'arrête sur } \langle M_{N,w}\rangle \\ &\iff N \text{ accepte } w \\ &\iff \langle N, w\rangle \in A_{\mathsf{TM}}.. \end{aligned}$$

Ainsi, par réduction, on en déduit que L n'est pas décidable.

Pour démontrer que L est récursivement énumérable, on montre (de manière équivalente) qu'il est Turing-reconnaissable. Considérons la machine de Turing R dont l'implémentation est donnée ci-dessous.

Sur toutes les entrées $\langle M\rangle \in L$, la machine R accepte cette entrée en un temps fini. On en déduit que R reconnait bien L, et donc L est Turing-reconnaissable donc récursivement énumérable.

Machine R

Entrée $\langle M\rangle$
  Simuler M sur $\langle M\rangle$.
  si M accepte $\langle M\rangle$ **alors**
    On accepte.

On peut démontrer que L n'est pas de complémentaire récursivement énumérable. En effet, par l'absurde, si L l'était, alors $\bar{L}$ serait Turing-reconnaissable. Mais, ceci impliquerai (comme L et $\bar{L}$ seraient Turing-reconnaissable) que L serait décidable (il suffit de lancer les deux machines reconnaissant L et $\bar{L}$ en parallèle pour décider L). Ce qui est ***absurde*** car on a montré l'indécidabilité de L.

Des résultats précédents, on en conclut que

- L est indécidable ;
- L est récursivement énumérable ;
- L n'est pas à complémentaire récursivement énumérable.