TD n°3
Théorie des catégories

Hugo Salou
Dept. Informatique

ENS DE LYON

9 avril 2025

Table des matières

Exercice 1.

Montrer que si un foncteur est un adjoint à droite (resp. à gauche) alors il est continue (resp. cocontinue).

Soit $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ un foncteur possédant un adjoint à gauche que l'on notera $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$. Ainsi, on sait que $\mathrm{Hom}(-, G-) \cong \mathrm{Hom}(F-, -)$.

Considérons un petit diagramme $J : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$. Ainsi, on a la chaîne d'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(A, G(\lim J)) &\cong \mathrm{Hom}(FA, \lim J) && \text{par adjoint} \\ &\cong \lim \mathrm{Hom}(FA, J) && \text{par continuité (TD2)} \\ &\cong \lim \mathrm{Hom}(A, GJ) && \text{par adjoint} \\ &\cong \mathrm{Hom}(A, \lim GJ) && \text{par continuité (TD2),} \end{aligned}$$

pour tout $A \in \mathbf{C}_0$. Ceci étant vrai quel que soit A, on a donc l'isomorphisme $\mathcal{Y}(G(\lim J)) \cong \mathcal{Y}(\lim GJ)$.

Par le lemme de Yoneda, on en déduit que $G(\lim J) \cong \lim GJ$. On a donc bien la continuité d'un foncteur possédant un adjoint à gauche, *i.e.* d'un foncteur qui est à un adjoint à droite.

Par dualité, on a bien le résultat pour les foncteurs possédant un adjoints à droite.

Exercice 2.

Montrer que si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une équivalence de catégories et $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ est un quasi-inverse de F, alors F est adjoint à gauche à G et G est aussi adjoint à gauche à F.

On veut construire l'isomorphisme

$$\alpha : \mathrm{Hom}(-, G-) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}(F-, -).$$

On sait qu'il existe deux isomorphismes naturels

$$\theta : \mathrm{id}_{\mathbf{D}} \Rightarrow F \circ G \qquad \text{et} \qquad \eta : \mathrm{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F.$$

Considérons $(f : A \to GB) \in \mathrm{Hom}(-, G-)$, et on veut construire une flèche de la forme $\alpha_{A,B}(f) : FA \to B$. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \\ GB \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{\qquad F \qquad} \quad \begin{tikzcd} FA \arrow[d, "Ff"] \arrow[dr, dashed, "\alpha_{A,B}(f)"] & \\ F(GB) \arrow[r, "\theta_B^{-1}"] & B \end{tikzcd} \quad ,$$

et on pose $\alpha_{A,B}(f) := \theta_B^{-1} \circ (Ff)$. Ceci donne donc un isomorphisme

$$\alpha_{A,B} : \mathrm{Hom}(A, GB) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(FA, B).$$

En effet, l'inverse est $\beta_{A,B} : g \mapsto (Gg) \circ \eta_A$ comme le montre le diagramme

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[dd, "g"] & & G(FA) \arrow[dd, "Gg"] & A \arrow[l, "\eta_A"'] \arrow[ddl, dashed, "\beta_{A,B}(f)"] \\
& \xrightarrow{\qquad G \qquad} & & \\
B & & GB &
\end{tikzcd}.$$

Ceci démontre ainsi que l'on a deux isomorphismes naturels

$$\alpha : \mathrm{Hom}(-, G-) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}(F-, -)$$
$$\beta : \mathrm{Hom}(F-, -) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}(-, G-).$$

démontrant ainsi que F et G sont adjoints à gauche de G et à droite de F respectivement.

Exercice 3.

On montre que les limites dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{C}) := [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ens}]$ *existent et se calculent point par point. Soit* $F : \mathbf{J} \to \mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ *un diagramme. On rappelle que* F *se voit comme* $\hat{F}$ *de* $[\mathbf{J} \times \mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ens}]$. *Vu que* $\mathbf{Ens}$ *est complet, montrer que* $\varprojlim F$ *existe et vaut en* X *:*

$$\big(\varprojlim F\big)(X) \cong \varprojlim \hat{F}(-, X),$$

ou écrite de façon plus suggestive,

$$\big(\varprojlim P_\bullet\big)(X) \cong \varprojlim P_\bullet(X),$$

avec $P_\bullet = F$ *(modulo curryfication). Quel est l'énoncé dual ?*

Comme **Ens** est complet, la limite $\varprojlim \hat{F}(-, X)$ existe et on note alors $\{\phi_{A,X} : \varprojlim \hat{F}(-, X) \to \hat{F}(A, X)\}$ le cône limite. De plus, on a que

$$(\varprojlim F)(Y) = \{\psi_X : \varprojlim (F-)(Y) \to (FX)Y\}.$$

Et, par curryfication, on a que

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim (F-)(Y) \arrow[r, "\text{curryfication}", "\sim"'] \arrow[d, "\phi_X"] & \varprojlim \hat{F}(-, Y) \arrow[d, "\psi_X"] \\
(FX)Y \arrow[r, "\text{curryfication}", "\sim"'] & \hat{F}(X, Y).
\end{tikzcd}$$

Ceci implique l'isomorphisme

$$(\varprojlim F)(X) \cong \varprojlim \hat{F}(-, X).$$

L'énoncé dual est que $\varinjlim F$ existe (car **Ens** est co-complet) et peut se calculer point par point avec :

$$(\varinjlim F)(X) \cong \varinjlim \hat{F}(-, X).$$

Exercice 4.

1. *On rappelle que pour $f : A \to B$ une fonction, on peut définir le foncteur $f^{-1} : \wp B \to \wp A$ entre catégories posétales. Montrer qu'il admet un adjoint à gauche (bien connu) et un adjoint à droite (à construire).*
2. *En déduire que*
   - $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;
   - $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$;
   - $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$;
3. *Pourquoi f n'a-t-il pas d'adjoint à gauche ?*

1. On pose le foncteur image directe, noté $f : \wp A \to \wp B$. Parce que
$$f(S) \subseteq T \iff S \subseteq f^{-1}(T),$$
quels que soient S et T, on sait donc que f est adjoint à gauche de f^{-1}. Pour l'adjoint à droite, il faut construire un foncteur de la forme $R : \wp A \to \wp B$ vérifiant l'équivalence
$$S \subseteq R(T) \iff f^{-1}(S) \subseteq T,$$
quels que soient S et T.

   On pose
$$R(T) := f(A) \setminus f(A \setminus T),$$
et on a bien l'équivalence demandée.

   En effet, si $S \subseteq R(T)$ alors $S \subseteq f(A) = \operatorname{im} f$ et $S \cap f(A \setminus T) = \emptyset$. Ceci implique que $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(f(A \setminus T)) = \emptyset$ et donc que l'on ait $f^{-1}(S) \cap (A \setminus T) = \emptyset$ (car $f^{-1}(f(A \setminus T)) \supseteq A \setminus T$). On en déduit que $f^{-1}(S) \subseteq T$

Réciproquement, si $f^{-1}(S) \subseteq T$, c'est alors que l'on ait $S \subseteq \operatorname{im} f$ et que $S \cap f(A \setminus T) = \emptyset$. On en déduit que $S \subseteq R(T)$.

Ceci permet de conclure que l'on a bien construit un adjoint à droite du foncteur f^{-1}.

2. On applique l'exercice 1. En effet, l'union est la limite du diagramme discret (que l'on notera A_I par la suite) dans la catégorie posétale $\wp X$ (pour X un ensemble quelconque) et la colimite est l'intersection.

- ▷ On a
$$f\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = f(\lim A_I) = \lim f(A_I) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$
car le foncteur f est continu comme adjoint à droite de f^{-1}.
- ▷ On a
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = f^{-1}(\lim A_I) = \lim f^{-1}(A_I) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$
car le foncteur f^{-1} est continu comme adjoint à droite du foncteur R.
- ▷ On a
$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = f^{-1}(\operatorname{colim} A_I) = \operatorname{colim} f^{-1}(A_I) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$
car le foncteur f^{-1} est cocontinu comme adjoint à gauche du foncteur f.

3. Supposons que f admette un adjoint à gauche, alors f donc un adjoint à droite, et ainsi il est continu. En particulier, on a l'égalité $f\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Sauf que c'est faux ! On considère par exemple le cas $A = B = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ muni de l'application

$$\begin{aligned} f : \llbracket 1, 3 \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ 1 &\longmapsto 1 \\ 2 &\longmapsto 2 \\ 3 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$.$$

Ainsi pour $A_1 = \{1, 2\}$ et $A_2 = \{2, 3\}$, on a

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\{2\}) = \{2\} \qquad \text{mais} \qquad f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 2\}.$$

En général, f n'admet pas d'adjoint à gauche.[1]

1. À moins que f soit injective, auquel cas $f^{-1}(S) \subseteq T \iff S \subseteq f(T)$ car l'image réciproque $f^{-1}(S)$ ne contient *que* les images de S et rien d'autre.

Exercice 5.

Montrer qu'une transformation naturelle $\alpha : P \Rightarrow Q$ est un monomorphisme dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ si et seulement si chaque composante $\alpha_X : P(X) \to Q(X)$ l'est. Quel est l'énoncé dual ?

Indice. Utiliser le lemme de Yoneda dans le sens difficile.

On procède en deux temps.

Considérons η et γ comme indiqué dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, Rightarrow, bend left, "\eta"] \arrow[r, Rightarrow, bend right, "\gamma"'] & P \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"] & Q \end{tikzcd} .$$

On sait que $\eta = \gamma$ si et seulement si $\eta_X = \gamma_X$ pour tout $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ (et de même pour $\alpha \circ \eta, \alpha \circ \gamma$). Supposons que $\alpha \circ \eta = \alpha \circ \gamma$, et que chaque α_X est un monomorphisme. Ainsi, $\alpha_X \circ \eta_X = \alpha_X \circ \gamma_X$ par définition de la composition et donc $\eta_X = \gamma_X$ quel que soit X.

$$\begin{tikzcd} OX \arrow[r, bend left, "\eta_X"] \arrow[r, bend right, "\gamma_X"'] & PX \arrow[r, "\alpha_X"] & QX \end{tikzcd} .$$

On en déduit $\eta = \gamma$ et ainsi que α est un monomorphisme.

Pour l'autre sens, le sens difficile, on suppose que $\alpha : P \Rightarrow Q$ est un monomorphisme. Fixons un X quelconque. On applique le lemme de Yoneda qui donne une transformation naturelle

$$\tau : \mathrm{Ev}(-, X) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Nat}(\mathcal{Y}(X), -),$$

où l'on a noté $\mathrm{Ev}(F, X)$ le bifoncteur d'évaluation. Ainsi, le diagramme

$$\begin{tikzcd} PX \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\tau_P", "\wr"'] & QX \arrow[d, "\tau_Q", "\wr"'] \\ \mathrm{Nat}(\mathcal{Y}(X), P) \arrow[r, "- \circ \alpha"] & \mathrm{Nat}(\mathcal{Y}(X), Q) \end{tikzcd}$$

commute. Et, si α est un monomorphisme alors $- \circ \alpha$ l'est aussi et il en va de même pour

$$\tau_Q^{-1} \circ (- \circ \alpha) \circ \tau_P,$$

par composition de monomorphismes (isomorphisme implique monomorphisme).

On en déduit que α_X est un monomorphisme, et ce quel que soit X. D'où l'équivalence.

L'énoncé dual est

> « une transformation naturelle $\alpha : P \Rightarrow Q$ est un épimorphisme dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}}$ si et seulement si chaque composante $\alpha_X : PX \to QX$ l'est ».

Exercice 6.

1. *Montrer que $\wp : A \mapsto \wp(A)$ et $f \mapsto \tilde{f}$ (où $\tilde{f}$ est l'image directe) n'est pas représentable.*

2. *Choisir une catégorie d'objet mathématique avec un foncteur d'oubli vers* **Ens** *et montrer qu'il est représentable (ou sinon, pourquoi il ne l'est pas). Les exemples du cours ne sont pas autorisés.*

1. Par l'absurde supposons le représentable. Ainsi, il existe A un ensemble tel que $\wp - \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}(A, -)$.

Considérons un ensemble fini B de cardinal m. Notons n le cardinal de A (potentiellement infini, cela ne posera pas problème s'il l'est). On a ainsi

$$2^m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dénombrement}}}{=} \operatorname{card} \wp(B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isomorphisme}}}{=} \operatorname{card} \mathrm{Hom}(A, B) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dénombrement}}}{=} (\operatorname{card} B)^{\operatorname{card} A} = m^n,$$

ce qui est faux pour un ensemble arbitraire B de cardinal m.

2. On considère la catégorie des monoïdes **Mon** muni des morphismes de monoïdes. Le foncteur d'oubli U : **Mon** $\to$ **Ens** est défini par :

- ▷ à un monoïde $(M, \cdot, \epsilon)$ on associe M l'ensemble sous-jacent ;
- ▷ à un morphisme $u : (M, \cdot, \epsilon) \to (N, \diamond, \varepsilon)$ on associe l'application $\hat{u} : M \mapsto N, x \mapsto u(x)$ la fonction sous-jacente.

On représente un tel foncteur d'oubli par le monoïde libre que l'on notera $(\{1\}^\star, \cdot, \varepsilon)$. (Un monoïde libre sur X est l'ensemble des mots sur l'alphabet X donné.) L'ensemble $\{1\}^\star$ est ainsi égal à

$$\{1\}^\star = \{1^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

L'opération $\cdot$ correspond à la concaténation usuelle des mots ($1^n \cdot 1^m = 1^{n+m}$ en est une conséquence), et ε correspond au mot vide ($\varepsilon = 1^0$ est aussi une conséquence).

Le monoïde libre sur $\{1\}$ est isomorphe à $(\mathbb{N}, +, 0)$ mais cette construction n'est plus vraie pour des alphabets plus grands (*c.f.* théorie des langages).

Construisons l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}((\{1\}^\star, \cdot, \varepsilon), (N, \diamond, \epsilon)) \cong N = U(N).$$

On définit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}((\{1\}^\star, \cdot, \varepsilon), (N, \diamond, \epsilon)) &\longrightarrow N \\ (u : \{1\}^\star \to N) &\longmapsto u(1). \end{aligned}$$

C'est bien un isomorphisme :

- ▷ *injectivité*, si $f, g : \{1\}^\star \to N$ vérifient $f(1) = g(1)$ mais par morphisme de monoïde, on a que $f(1^n) = f(1)^n = g(1)^n = g(1^n)$ et les $(1^n)_{n \in N}$ engendrent le monoïde libre (il n'y a rien de plus en réalité), donc $f = g$;
- ▷ *surjectivité*, pour un élément $x \in N$ on pose le morphisme u défini par $u(1^n) := x^n$, il vérifie bien que $u(1) = x$, d'où la surjectivité.

On en conclut quant à la représentabilité du foncteur d'oubli sur les monoïdes $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Ens}$.

Exercice 7.

Dans une catégorie posétale admettant tout produit fini (dite « cartésienne »), on appelle (s'il existe) l'exponentiation par X le foncteur $(-)^X$ (s'il existe) adjoint à gauche de

$$\begin{aligned} - \times X : \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ A &\longmapsto A \times X \\ (f : A \to B) &\longmapsto (f \times \mathrm{id}_X : A \times X \to B \times X). \end{aligned}$$

1. *Décrire l'exponentiation dans* **Ens**.
2. *Montrer que dans une catégorie admettant tout objet exponentiel $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.*
3. *Dans une catégorie admettant tout produit fini et tout objet exponentiel (c'est à dire « clos cartésien ») montrer que si de plus* $\mathbf{C}$ *est localement petite et contient les coproduits alors*

$$A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C.$$

1. Montrons que dans **Ens**, l'exponentiation $(-)^X$ correspond au foncteur $\mathrm{Hom}(X, -)$. Soient A, B, X trois ensembles. On a donc l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(X, B)) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(A \times X, B) \\ (f : A \to \mathrm{Hom}(X, B)) &\longmapsto \left(\begin{array}{rcl} g : (A \times X) & \to & B \\ (a, x) & \mapsto & f(a)(x) \end{array} \right), \end{aligned}$$

qui est juste une curryfication. D'où $\mathrm{Hom}(X, -)$ est adjoint à gauche de $- \times X$. On en déduit que dans **Ens** l'exponentiation existe toujours et qu'il vaut $\mathrm{Hom}(X, -) \cong (-)^X$.

2. Soient X, A, B, C des objets. On a la chaine d'isomorphisme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(X, (A^B)^C) &\cong \mathrm{Hom}(X \times C, A^B) && \text{par adjoint}\\
&\cong \mathrm{Hom}((X \times C) \times B, A) && \text{par adjoint}\\
&\cong \mathrm{Hom}(X \times (C \times B), A) && \text{par TD2 (ex1)}\\
&\cong \mathrm{Hom}(X \times (B \times C), A) && \text{par TD2 (ex1)}\\
&\cong \mathrm{Hom}(X, A^{B\times C}) && \text{par adjoint.}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathscr{Y}((A^B)^C) \cong \mathscr{Y}(A^{B\times C})$. D'où, $(A^B)^C \cong A^{B\times C}$ par le lemme de Yoneda.

3. Le foncteur $A \times -$ admet un adjoint à gauche. Il est donc co-continu (exercice 1).

Considérons $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ le diagramme discret donné ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] & C \arrow[loop above, "\mathrm{id}_C"]
\end{tikzcd} .$$

On a la chaîne d'isomorphismes suivante :

$$\begin{aligned}
A \times (B + C) &\cong A \times (\operatorname{colim} F)\\
&\cong \operatorname{colim}(A \times F)\\
&\cong A \times B + A \times C,
\end{aligned}$$

car le diagramme $A \times F$ est :

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{A\times B}"] & A \times C \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{A\times C}"]
\end{tikzcd} .$$

Exercice 8.

On dit qu'une catégorie est filtrante si tout diagramme fini admet un cocône.

1. *Pourquoi cela généralise la notion d'ordre filtrant (c.f. TD 2) ?*

On appelle (co)limite filtrante une (co)limite indexée par une catégorie filtrante. Dans une catégorie localement petite, on appelle un objet X compact dès lors que $h^X := \mathrm{Hom}(X, -)$ commute avec les limites filtrées.

2. *Montrer qu'un objet X est compact si et seulement si toute flèche $X \xrightarrow{u} \operatorname{colim} U_i$, pour un diagramme $U_\bullet$ filtrant, se factorise par $X \xrightarrow{f} U_j \xrightarrow{\iota_j} \operatorname{colim} U_i$.*
3. *Quels sont les objets compacts de $\mathbb{O}_X$ la catégorie des ouverts munie des inclusions de l'espace topologique X ? (Indice : le nom est bien choisi).*
4. *Quels sont les objets compacts de* **Ens** *?*
5. *Quels sont les objets compacts de* $\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$ *?*
6. *Qu'en est-il de* **Grp** *?*

1. Considérons une catégorie posétale $\mathbf{C}$ munie d'un ordre filtrant noté $\preceq$. Montrons que c'est une catégorie filtrante.

   Montrons que tout diagramme fini de cardinal n admet un cocône par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.

- Pour $n = 1$, on considère un diagramme F de cardinal 1. Un cocône de ce diagramme est celui ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[d, "\mathrm{id}_{FX}"] \\ FX \end{tikzcd} .$$

- Pour un diagramme F de cardinal $n+1$, on isole un élément de ce diagramme X_0 et on considère le diagramme F' contenant les n autres éléments. Par hypothèse de récurrence, ce diagramme possède un cocône C' muni des morphismes $\phi'_X : F'X \to C'$. Parce que $\preceq$ est filtrant, il existe $C \in \mathbf{C}$ tel que $X_0 \preceq C$ et $C' \preceq C$. Le diagramme suivant est donc un cocône sur F :

$$\begin{tikzcd} FX_0 \arrow[ddrr] & & FX_1 \arrow[drr] & FX_2 \arrow[dr] & \cdots & FX_{n-1} \arrow[dl] & FX_n \arrow[dll] \\ & & & & C' \arrow[dll] & & \\ & & C & & & & \end{tikzcd} .$$

On en conclut que toute catégorie posétale sur un ordre filtrant est une catégorie filtrante.

2. On procède par équivalence.

$$\begin{aligned} & X \text{ compact} \\ \iff & \forall U_\bullet \text{ diag. filtrant}, \operatorname{colim} h^X(U_i) \cong h^X(\operatorname{colim} U_i) \\ \iff & \forall U_\bullet \text{ diag. filtrant}, \underbrace{\operatorname{colim} \mathrm{Hom}(X, U_i)}_{\{\phi_i : \mathrm{Hom}(X,U_i) \to N\}} \cong \mathrm{Hom}(X, \operatorname{colim} U_i) \\ \iff & \forall U_\bullet \text{ diag. filtrant}, \forall u : X \to \operatorname{colim} U_\bullet, \exists! i \in I, \\ & \qquad \text{le diagramme suivant commute} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[dd, "u"'] & \\ & U_i \arrow[dl, "\iota_i"] \\ \operatorname{colim} U_\bullet & \end{tikzcd},$$

où l'on a noté $(\iota_i : U_i \to \operatorname{colim} U_\bullet)$ le cocône limite sur $U_\bullet$ et N la pointe du cocône limite $\operatorname{colim} \operatorname{Hom}(X, U_i)$.

3. Montrons que Y est compact (au sens que chaque couverture par ouvert de Y admet une sous-couverture finie de Y) si et seulement si Y est un objet compact dans $\mathcal{O}_X$. Je noterai « objet compact » pour la définition catégorique et « compact topologique » pour la définition topologique.

   Dans cette catégorie, la colimite correspond à l'union ensembliste. Considérons un recouvrement $\bigcup_{i\in I} U_i = Y$, pour Y quelconque. Le diagramme

   $$\begin{aligned} K : \wp_{\text{finies}}(I) &\longrightarrow \mathcal{O}_X \\ I \supseteq J &\longmapsto \bigcup_{j\in J} U_j \end{aligned}$$

   est filtrant (toute famille finie de partie finie admet une union finie) et sa colimite vaut $\bigcup_{i\in I} U_i = Y$.

   Ainsi, si Y est un objet compact, alors il existe $J \subseteq I$ fini et f tel que le diagramme suivant commute :

   $$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_Y"'] & \\ & \bigcup_{j\in J} U_j \arrow[dl, "\iota_J"] \\ \bigcup_{i\in I} U_i = Y & \end{tikzcd}.$$

   Ceci implique nécessairement que $\bigcup_{j\in J} U_j = Y$ avec J fini. On en conclut que tout recouvrement de Y admet un sous-recouvrement fini, donc que Y est un compact topologique.

Réciproquement, si Y est un compact topologique, et soit $U_\bullet : I \to \mathfrak{O}_X$ un diagramme filtrant quelconque. Montrons l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(Y, \operatorname{colim} U_\bullet) \cong \operatorname{colim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(Y, U_\bullet).$$

L'ensemble à droite est vide si et seulement si $\operatorname{colim} U_\bullet = \bigcup_{i \in I} U_i \subsetneq Y$, et c'est un singleton sinon (argument de continuité). Dans le premier cas, ceci implique que tous les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(Y, U_i)$ par le même argument et donc $\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(Y, U_\bullet)$ est vide. Dans l'autre cas, par compacité topologique de Y, on sait que l'on peut extraire un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ tel que $Y = \bigcup_{j \in J} U_j$. Et, vu que le diagramme $U_\bullet$ est filtré, alors il existe un cocône sur J, de pointe p. On en déduit que $U_c \supseteq \bigcup_{j \in J} U_j = X$, d'où $U_c = X$. On a donc bien l'isomorphisme demandé.

4. Montrons qu'un ensemble est compact (au sens d'être un objet compact dans **Ens**) si et seulement s'il est fini.

Remarquons que l'union ensembliste est une colimite filtrée, et que pour une famille finie d'ensembles finis, leur union est fini.

Considérons un ensemble compact $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ où les éléments $U_i \subseteq X$ sont des sous-ensembles finis, et où I est une catégorie filtrante. Alors, par la question 2, il existe $i \in I$ et f tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_X"'] & \\
& U_i \arrow[dl, "\iota_i"] \\
\operatorname{colim} U_\bullet = X &
\end{tikzcd}.$$

On en déduit que nécessairement $U_i \cong X$, ce qui implique X fini.

Réciproquement, soit $U_\bullet : I \to \textbf{Ens}$ un diagramme filtrant quelconque. On a l'isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}(X, \underbrace{\operatorname{colim} U_\bullet}_{\bigcup_{i\in I} U_i}) \cong \underbrace{\operatorname{colim} \mathrm{Hom}(X, U_\bullet)}_{\bigcup_{i\in I} \mathrm{Hom}(X, U_\bullet)},$$

par les propriétés des applications usuelles sur les ensembles.

5. Considérons un espace vectoriel E. On pose $E = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{vect}(e_i)$. On « décompose » ainsi E en somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 1. On note $U_i = \mathrm{vect}\, e_i$.

   Le diagramme

$$\begin{aligned} K : \wp_{\text{finies}}(I) &\longrightarrow \mathbf{Vect}_\Bbbk \\ J &\longmapsto \bigoplus_{j\in J} U_j, \end{aligned}$$

   c'est un diagramme filtrant (la somme d'espace vectoriels existe toujours, et c'est un espace vectoriel) et sa colimite vaut $\bigoplus_{i\in I} U_i = E$.

   Ce diagramme filtrant permet la factorisation

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dd, "\mathrm{id}_E"'] \arrow[dr, "f"] & \\ & \bigoplus_{j\in J} U_j \arrow[dl, "\iota_j"] \\ E = \bigoplus_{i\in I} U_i & \end{tikzcd} .$$

   On en déduit que $E = \bigoplus_{j\in J} U_j$ avec J fini, donc que E est de dimension finie.

   Réciproquement, si $U_\bullet : I \to \mathbf{Vect}_\Bbbk$ est un diagramme filtrant quelconque, où X est fini. Montrons l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(X, \underbrace{\operatorname{colim} U_\bullet}_{\bigoplus_{i\in I} U_i}) \cong \underbrace{\operatorname{colim} \mathrm{Hom}(X, U_\bullet)}_{\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(X, U_\bullet)},$$

   en décomposant les applications sous chacune de leurs coordonnées (possible car X est fini). D'où la réciproque.

6. Pour **Grp**, on procède quasi-exactement que pour $\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$. On décompose un groupe G en $\langle g_i \mid i \in I\rangle$, et on pose le diagramme

$$\begin{aligned} K : \wp_{\text{finies}}(I) &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ J &\longmapsto \langle g_i \mid i \in J\rangle. \end{aligned}$$

On montre, très similairement au raisonnement réalisé dans les précédente question, que G est compact si et seulement si $G = \langle g_i \mid i \in J\rangle$ avec J fini. Autrement dit, G est compact si et seulement s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

Exercice 10.

1. *Montrer que* $\mathbf{Co}\backslash\mathbb{K} \cong \mathbf{Ext}_{\mathbb{K}}$ *où* $\mathbf{Co}$ *est la catégorie des corps et* $\mathbf{Ext}_{\mathbb{K}}$ *est la catégorie des extensions* $\mathbb{L}$ *de* $\mathbb{K}$ *ayant pour flèches les* $\mathbb{K}$*-morphismes de corps.*
2. *Donner de même une description équivalente de* $\mathbf{Ens}\backslash\{*\}$ *avec* $\{*\}$ *un singleton.*

1. Une extension d'un corps $\mathbb{K}$ est un couple $(\mathbb{L}, \iota)$ où $\iota : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ est un morphisme de corps. Et, un objet de $\mathbf{Co}\backslash\mathbb{K}$ est un couple $(\mathbb{L}, \iota)$ où $\mathbb{L}$ est un corps et $\iota : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ est un morphisme de corps (car morphisme de $\mathbf{Co}$.)

   On a donc correspondance exacte des objets.

   Si on a un morphisme d'extension $u : \mathbb{L} \to \mathbb{L}'$, alors u vaut l'identité sur $\mathbb{K}$ (par définition de morphisme d'extensions) et c'est un morphisme de corps. Par ces deux contraintes, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{K} & \\ \mathbb{L} \arrow[ur, "\iota"'] \arrow[rr, "u"] & & \mathbb{L}' \arrow[ul, "\iota'"] \end{tikzcd} .$$

   Ceci conclut quant à l'isomorphisme des deux catégories.
2. Construisons l'isomorphisme entre les catégories $\mathbf{Ens}\backslash\{*\}$ et $\mathbf{Ens_p}$

où $\mathbf{Ens_p}$ est la catégorie des espaces pointés :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Ens}\backslash\{*\} &\xleftrightarrow{\sim} \mathbf{Ens_p} \\
(A, \pi : \{*\} \to A) &\longmapsto (A, \pi(*)) \\
(A, \pi : * \mapsto p) &\longleftarrow\!\shortmid (A, p) \\
((A, \pi) \overset{u}{\to} (A', \pi')) &\longmapsto ((A, \pi(*)) \overset{u}{\to} (A', \pi'(*))) \\
u \circ \pi = \pi' \qquad & \qquad u(\pi(*)) = \pi'(*) \\
((A, \pi : * \mapsto p) \overset{u}{\to} (A', \pi' : * \mapsto p')) &\longleftarrow\!\shortmid ((A, p) \overset{u}{\to} (A', p)) \\
u \circ \pi = \pi' \qquad & \qquad u(p) = p'.
\end{aligned}
$$

Exercice 11.

Soient $\mathbf{C}$ une petite catégorie, $\mathbf{E}$ une catégorie, et $F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ un diagramme tel que $\lim_{\mathbf{C}} F$ existe. Montrer que la catégorie des cônes sur F est isomorphe à la catéogorie relative à $\lim_{\mathbf{C}} F$. Si $\operatorname{colim}_{\mathbf{C}} F$ existe, énoncer et démontrer la proposition duale.

Notons $\{\psi_X : \lim_{\mathbf{C}} \to FX\}_{X\in\mathbf{C}}$ le cône limite.

On construit l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cônes}_{\mathbf{C}}(F) &\overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbf{C}/\lim_{\mathbf{C}} F \\
\{\phi_X : C \to FX\}_{X\in\mathbf{C}} &\longmapsto (C, \Phi : C \to \lim_{\mathbf{C}} F) \\
\{\phi_X := \psi_X \circ \Phi\}_{X\in\mathbf{C}} &\longleftarrow\!\shortmid (C, \Phi : C \to \lim_{\mathbf{C}} F) \\
(u : C \to C') &\longleftrightarrow (u : (C, \Phi) \to (C', \Phi')) \\
\psi_X \circ u = \psi'_X &\qquad\quad \Phi \circ u = \Phi'.
\end{aligned}$$

où, dans le premier cas, on utilise la propriété universelle de la limite sur F. Pour l'équivalence entre $\psi_X \circ u = \psi'_X$ et $\Phi \circ u = \Phi'$ on procède par :

- ▷ « $\implies$ ». propriété universelle ;
- ▷ « $\impliedby$ ». par morphisme de cocône.

La propriété duale est : la catégorie des cocônes sur F est isomorphe à la catégorie corelative à $\operatorname{colim}_{\mathbf{C}} F$. On procède par dualité.

- ▷ la colimite $\operatorname{colim}_{\mathbf{C}} F$ est une limite dans la catégorie opposée ;
- ▷ un cocône sur F est un cône dans la catégorie opposée ;
- ▷ on a $(\mathbf{C}\backslash X)^{\mathrm{op}} = \mathbf{C}^{\mathrm{op}}/X$.

Exercice 12.

On donne (pour la première fois !) la définition de propriété universelle la plus commune, celle de morphisme universelle. Soit $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ un foncteur, et soit $X \in \mathbf{C}$. On définit le morphisme universel de X vers G par un couple $(A, u : X \to GA)$ tel que tout morphisme $f : X \to GB$ on dispose d'un unique $g : A \to B$ tel que le triangle suivant (à droite) commute :

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dd, dashed, "g"] & & & GA \arrow[dd, "Gg"] & X \arrow[l, "u"'] \arrow[ddl, "f"] \\
& {} \arrow[r, "G"] & {} & & \\
B & & & GB &
\end{tikzcd}
.
$$

1. *Montrer qu'un morphisme universel de X vers $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ est tout simplement un objet initial de la catégorie fléchée $\mathbf{D}\backslash X$.*
2. *Montrer que le foncteur $\mathrm{Hom}(X, G-) : \mathbf{D} \to \mathbf{Ens}$ est représenté par A où $\eta : h^A \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathrm{Hom}(X, G-)$ revient à dire que $(A, \eta_A(\mathrm{id}_A) : X \to GA)$ est le morphisme universel de X dans G.*
3. *Montrer aussi qu'une propriété universelle est une version locale d'un adjoint, c'est-à-dire un adjoint F à gauche de G répond pour tout X au problème universel de X vers G avec $(FX, \eta_X : X \to GFX)$ où η est l'unité de $F \dashv G$.*

1. Un objet initial de la catégorie relative $\mathbf{D}\backslash X$ est un objet de la forme $(A, u : X \to GA)$ tel que pour tout autre objet $(B, v : X \to GB)$ on a un unique morphisme $g : A \to B$ qui fait

commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "g"] & & GA \arrow[d, "Gg"'] & X \arrow[l, "u"'] \arrow[dl, "v"] \\ B & \arrow[r, "G"] & GB & \end{tikzcd} .$$

Ainsi, un morphisme universel de X vers $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ est tout simplement un objet initial de la catégorie $\mathbf{D}\backslash X$.

2. On pose l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \eta_B : \mathrm{Hom}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(X, GB) \\ g &\longmapsto Gg \circ u, \end{aligned}$$

car (A, u) est est un morphisme universel. Le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A, B) \arrow[r, "f\circ-"] \arrow[d, "\eta_B", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(A, C) \arrow[d, "\eta_C", "\sim"'] \\ \mathrm{Hom}(X, GB) \arrow[r, "Gf\circ-"] & \mathrm{Hom}(X, GC) \end{tikzcd} ,$$

d'où η est une transformation naturelle $\mathrm{Hom}(A, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}(X, G-)$. On conclut que A représente $\mathrm{Hom}(X, G-)$.

3. On a l'isomorphisme naturel $\alpha : \mathrm{Hom}(X, G-) \Rightarrow \mathrm{Hom}(FX, -)$ où

$$\begin{aligned} \alpha_B : \mathrm{Hom}(X, GB) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(FX, B) \\ f &\longmapsto \varepsilon_B \circ Ff, \end{aligned}$$

où $\varepsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$. Ceci implique que, pour $f : X \to GB$, il existe un unique morphisme $g \in \mathrm{Hom}(FX, B)$. Ainsi, par adjoint

$$G(\alpha_B(f)) \circ \eta_X = G(\varepsilon_B \circ Ff) \circ \eta_X = f.$$

Ceci implique que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[dd, dashed, "\alpha_B(f)"'] & & GFX \arrow[dd, "G(\alpha_B f)"'] & X \arrow[l, "\eta_X"] \arrow[ddl, "f"] \\
{} \arrow[r, Rightarrow, "G"] & {} & & \\
B & & GB &
\end{tikzcd}.$$

Ceci permet d'en conclure que (FX, η_X) est un morphisme universel.