Algorithmique 2 TD n° 5.

Q1. (a) on fait un DFS $\rightsquigarrow O(n)$

(b) on calcule les degrés et on donne les sommets de degré 1 :
↳ $O(n)$ ↳ $O(2n)$

Q2. (a) On fait de la programmation dynamique : (on peut aussi procéder à un tri à l'aide d'un bucket sort)

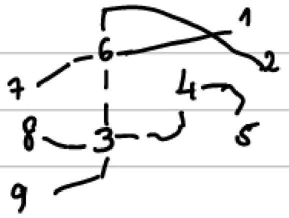
$$mwvc[x] := \min \left\{ poids(x) + \sum_{x \to z \to y} mwvc[y] \; , \; \sum_{x \to y} mwvc[y] \right\}.$$

(b) On fait un 1er DFS pour trouver le sommet x le plus loin du sommet choisi arbitrairement. Ensuite, avec un 2nd DFS, on part de x et on regarde le sommet y le plus loin de x.

diam(T) = profondeur de y dans le 2nd parcours

Q3. 6643633

Q4.



On crée une file de priorité sur $[\![1, |w|+2]\!]$ où les priorités sont les nb d'occ dans w, plus un.

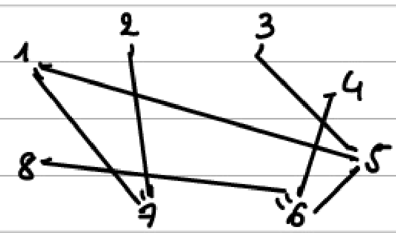
$i \leftarrow 0$

Tant que la file de prio n'est pas vide faire
- Extraire le min x.
- Relier x à w_i
- $i \leftarrow i+1$.
- Retirer 1 à la prio de w_i et x.
- Si prio = 0 alors on le retire.

Solution : On barre des sommets. On lit le mot, à une lettre on la relie au plus petit qui n'est pas barré et qui n'est pas dans la séquence restante ; puis on barre la lettre.

Q5. $|T_n| = n^{n-2}$

7 5 6 1 5 6



TD n° 6.

Q 1. (a) Soient T_1 et T_2 deux arbres couvrant de poids minimum.
Supposons $T_1 \neq T_2$ d'où $E(T_1) \Delta E(T_2) \neq \emptyset$.
Soit $e \in E(T_1) \Delta E(T_2)$ de poids min.

Sans perdre en généralité, supposons $e \in E(T_1)$.
Le graphe $T_2 + e$ a un cycle C.

Soit $e' \in (C \setminus \{e\}) \cap (E(T_2) \setminus E(T_1))$.

Alors, $T_2 + e' - e$ est un arbre couvrant de poids $<$ poids de T_2.
Absurde.

On conclut $T_1 = T_2$.

(b) Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ tels que $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_n)$.
On pose $w'(e_i) := i$.

Comme les poids $(w'(e))_{e \in E}$ sont tous différents, alors on peut appliquer l'algorithme et avoir T.

Et, comme l'ordre défini par w' est un raffinement de l'ordre défini par w, on a que T est un ACPM pour w.

Q 2. On considère $G = (V, \mathcal{P}_2(V), w)$ où $w(v, v') := d(v, v')$.
On fait $n - k$ étapes de Kruskal.

Complexité en $O((n-k)\,\alpha(n))$.

Soit C le résultat d'espacement ε.
Soit C' un autre k-clustering.
Il existe u, v dans 2 composantes différentes de C' et dans la même composante de C.
Montrons que $d(u,v) \leq \varepsilon$ (ce qui implique espacement $(C') \leq \varepsilon$).
Soit st tel que $d(s, t) = \varepsilon$.

Si $d(s,t) = \varepsilon < d(u,v)$ et on sait que st ne crée pas de cycle alors absurde car Kruskal aurait choisit st.

Q3. Arbres non enracinés

- Réflexivité : $\phi = id$
- Symétrie : $\phi' = \phi^{-1}$
- Transitivité : $\phi'' = \phi' \circ \phi$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "\phi'' = \phi' \circ \phi"'] & V_2 \arrow[r, "\phi'"] & V_3 \end{tikzcd}$$

Arbre enraciné :

- Réflexivité : $\phi = id$
- Symétrie : $\phi' = \phi^{-1}$
- Transitivité : $\phi'' = \phi' \circ \phi$

$$\begin{tikzcd} r_1 \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right] & r_2 \arrow[r, mapsto] & r_3 \end{tikzcd}$$

Q4.

$A \sim D$ avec l'isomorphisme

a	w	f	u	k	r
b	x	g	s		
c	y	h	t		
d	z	i	q		
e	v	j	p		

$C \not\sim A, D$ car il existe un sommet de degré 4 relié à trois feuilles dans C mais pas dans A.

$B \not\sim A, C, D$ car $deg_B(2) = 2$ et $deg_A(\cdot) \neq 2$ $deg_C(\cdot) \neq 2$.

Q5. $\forall x \in V(T-F),\ R_{T-F}(x) = R_T(x) - 1$

$$\begin{aligned} C(T-F) &= \{x \in V(T-F) \mid R_{T-F}(x) = R(T-F)\} \\ &= \{x \in V(T-F) \mid R_T(x) = R(T)\} \\ &= C(T) \end{aligned}$$

Q6. Par récurrence forte sur $\#T$. Complexité en $O(n)$, c.f. TD 5.

Q7 $T \sim T' \iff \exists r \in C(T), \exists r' \in C(T'), (T,r) \sim (T',r')$

"$\Leftarrow$" oui

"$\Rightarrow$" $R(\phi(x)) = R(x)$

d'où $C(T') = C(\phi(T)) = \phi(C(T))$.

Q8. On calcule $C(T)$ et $C(T')$ en $O(n)$.

Soit $x \in C(T)$.

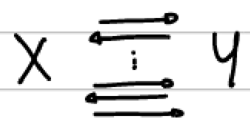
Pour tout $x' \in C(T')$, tester $(T,x) \sim (T',x')$.

Complexité en $O(n + 2 f(n)) = O(f(n) + n)$.

TD n° 7

I Graphes bipartis

Q1. S'il est biparti et qu'il a un $(2k+1)$-cycle alors



Absurde car $X \neq Y$.

Réciproquement, si G n'est

Q2. DFS en $O(n+m)$ pour avoir un 2-coloriage

II Tri topologique par élagage

Q3. On part que $u \in V$.
Tant que $\deg^+(u) > 0$ faire
  $u \leftarrow$ un prédécesseur de u

Q4. cycle $\Rightarrow$ $x_1 < \dots < x_n$ dans le tri topo
$x_1 \to \dots \to x_n \to x_1$ $< x_1$ absurde.
acyclique $\Rightarrow$ tri topo
Soit v de $\deg^+(v) = 0$.

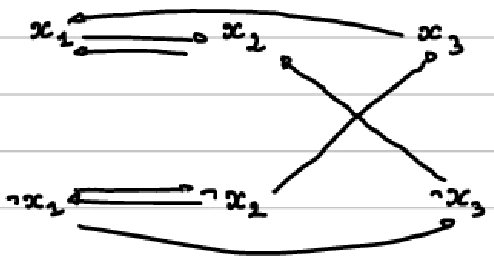
$v < \boxed{\text{tri topo de } G - v}$
acyclique

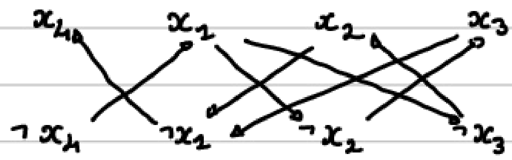
Q5. On calcule tous les $\deg^+$ que l'on maintient.
On extrait tous les sommets de $\deg^+ = 0$ (dans une pile)

III Graphe pour 2-SAT

$\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$

Q6





Q7. Que le graphe ne contienne pas de cycle avec x_i et $\neg x_i$.

Q8. DFS en O(nombre de clauses)

$\rho : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{B}$

$x_i \longmapsto$ Vrai ssi $x_i < \neg x_i$

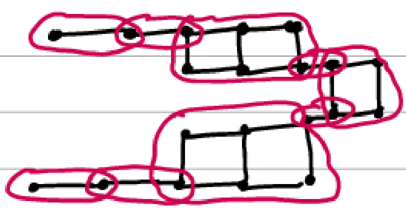
tri topo

IV Points d'articulations, ponts, et composantes 2-connexes.

Q9. Points d'articulation : II, IX, XII, XIX

Ponts : II – III, VIII – IX, XIII – XII, XIX – XVIII

Comp. bi-connexes :



Q10. Si r est un point d'articulation avec < 2 fils alors retirer r ne déconnecte pas le graphe. Absurde !

Si la racine a ≥ 2 fils alors les sous arbres des fils de r sont des composantes connexes de $G - r$.
D'où point d'articulation.

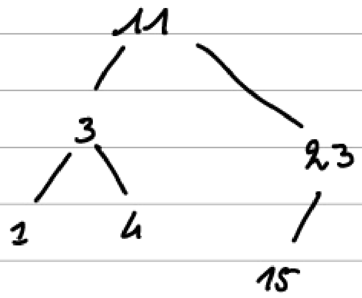
Q11.

10 n° 8

I. Jeu des erreurs

Q1. Vrai

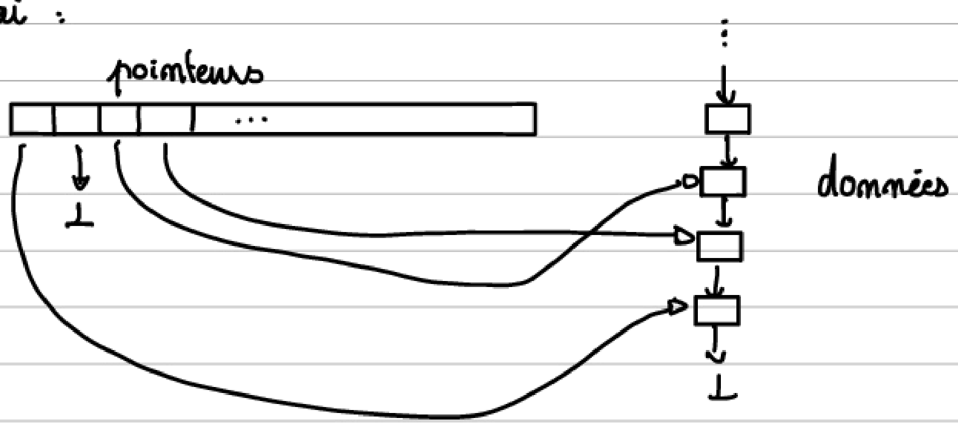
Q2. Faux : 15 < 4



Q3. Faux : 20 18 il faut faire de 7 à 1

Q4. Faux : pas d'hypothèse sur le poids de e

Q5. Vrai :



Q6. On fait l'algorithme de Prim Jarník avec trois buckets

⊔ arêtes de poids 1	⊔ arêtes de poids 2	⊔ arêtes de poids 3	on peut remplir ces arêtes par DFS du graphe

II Coloriage minimal et k-ième minimum

Q7. Par programmation dynamique : $opt : V \times [\![1, \Delta+1]\!] \to \mathbb{N}$

où $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v)$

$$opt(u, i) = i + \sum_{u \to v} \min_{1 \le j \le \deg v + 1} opt(v, j)$$

Algo en $\underbrace{\sum_{u \in V} \sum_{u \to v}}_{\le |E|} \underbrace{d(v)}_{\le \Delta}$

Q8. Tas & k extractions de min

ou... quick select

III Graphes dynamiques

Q9. (a) oui

(b) $\Rightarrow$ oui $\quad \Leftarrow c_i = \max(t_i, t_{i+1})$

[ ]
[ ] $\rightsquigarrow$ contre-exemple
[ ]

(c)

$$TCM := \min_{\substack{\text{chemins} \\ \text{de contagion}}} c_\ell$$

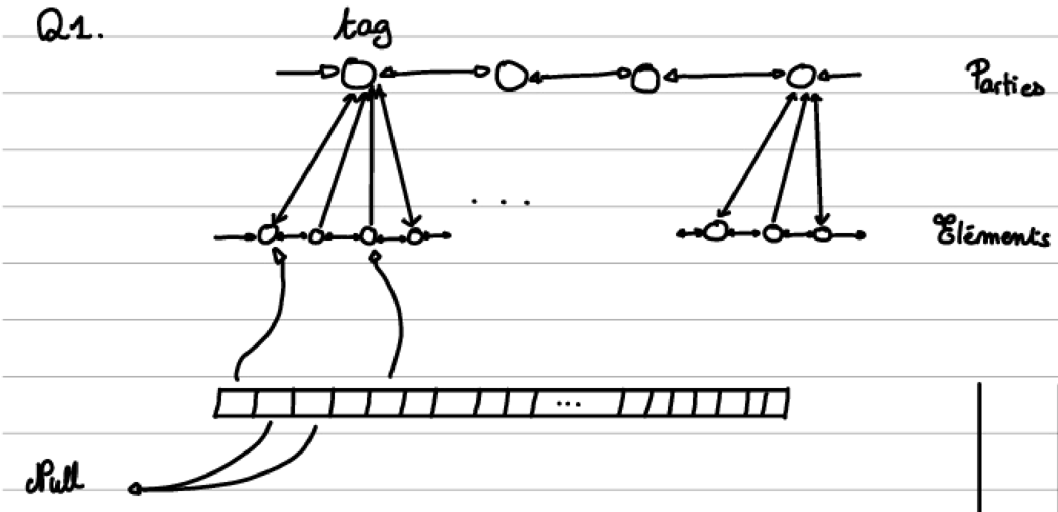
parcours du graphe en $O(|V| + |E|)$

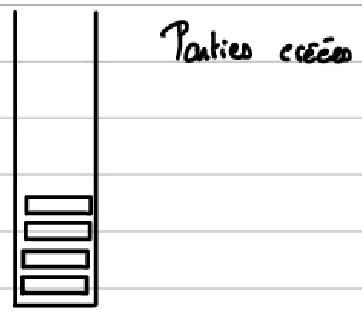
Q 10. On fait un parcours avec une file de priorité.

TD n° 9

I. Raffinement de partition

Q1.





II. Inclusion d'ensembles

Q2. (a) On construit une table de hachage.
On ajoute (i, x) à la table pour tout i et tout $x \in A_i$.
On teste si $(T[i], x)$ est dans la table pour tout i, tout $x \in A_i$.
↳ oui pour tout $i, x \Rightarrow$ oui
↳ non pour un certain $i, x \Rightarrow$ non

D'où une complexité en $O^*(n+m)$

(b) Solution magie magie

$M \leftarrow$ malloc (n^2)
$V \leftarrow$ malloc (n^2) } magie magie c'est un $O(1)$
$cnt \leftarrow 0$

Add$((i, x))$:=
- $M[i \cdot n + x] \leftarrow cnt$
- $V[cnt] \leftarrow i \cdot n + x$
- $cnt \leftarrow cnt + 1$

Membership$((i, x))$:=
- Si $M[i \cdot n + x] \geq cnt$ alors faux
- Sinon si $V[M[i \cdot n + x]] \neq i \cdot n + x$
  - alors faux
  - sinon vrai

D'où une complexité en $O(n+m)$

Autre solution :

Pour tout j, $U[j] \leftarrow \{ i \mid T[i] = j \}$

$E \leftarrow [\text{faux}, \dots, \text{faux}]$

Pour tout j

- Pour tout $x \in A_j$, $E[x] \leftarrow$ vrai
- Pour tout $i \in U[j]$
  - Pour tout $y \in A_i$ Tester $E[y]$
- Pour tout $x \in A_j$, $E[x] \leftarrow$ faux

III LexBFS

Q3. Si $L[j] \not- L[i] - L[k]$. où $i < j < k$

alors

si, au moment de traiter l'indice i, $L[j]$ et $L[k]$ sont dans la même partie alors on a $k < j$, ce qui n'est pas possible.

D'où $L[j]$ et $L[k]$ sont déjà dans des parties différentes.

Soit t minimal tel que $L[t] - L[j]$ xor $L[t] - L[k]$.

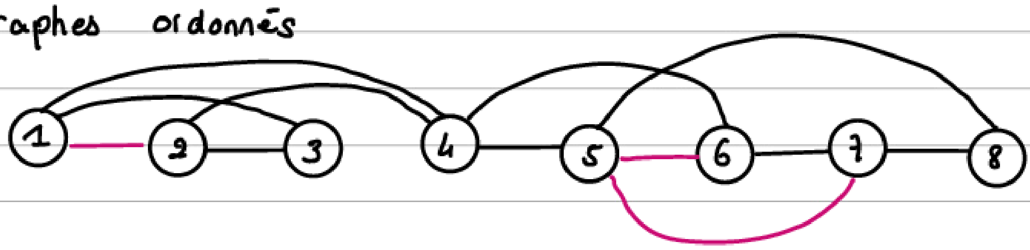
Par $j < k$ alors $L[t] - L[j]$ et $L[t] \not- L[k]$.

Q4. (a)
$$\sum_{x \in V} \Big(2 \cdot O(1) + O(\# N(x)) \Big) + O(\# V) = O(2n + 2m)$$

(b) On extrait le max avec la structure de Q1.

IV Graphes ordonnés

Q5.



Q6. Si σ' simplicial et $G^*(\sigma') = G$, $\sigma \preceq \sigma'$

alors

$$G \subseteq G^*(\sigma) \subseteq G^*(\sigma') \subseteq G$$

d'où σ simplicial

Q7.

(a) On vérifie $\underbrace{N^-(i)}_{A_i} \subseteq \underbrace{N^-(j) \cup \{j\}}_{A_{j+n}}$ pour tout i et $j = \min N^-(i)$.

Complexité en $O(n+m)$.

(b) $[\![1, i-1]\!] \setminus N^-(i) \subseteq ([\![1, j-1]\!] \setminus N^-(j)) \cup \{j\}$
ssi $[\![1, i-1]\!] \setminus N^-(i) \subseteq [\![1, i-1]\!] \setminus N^-(j)$
ssi $N^-(i) \supseteq N^-(j)$

On peut tester ça pour tout i, où $j = \max \{ i + j \}$