Quotient et dualité

1 Exercice 1.

Donner un exemple de $\Bbbk$-espace vectoriel E et de sous-espace vectoriel F de E où

1. $\dim F$ *est finie et* $\dim(E/F)$ *est infinie ;*
2. $\dim F$ *est infinie et* $\dim(E/F)$ *est finie ;*
3. $\dim F$ *est infinie et* $\dim(E/F)$ *est infinie.*

1. Considérons $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(0, 0)\}$.
2. Considérons $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^2$.
3. Considérons $\mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R} \times \{0\}$.

2 Exercice 2. *Théorèmes d'isomorphismes*

Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $\pi : E \to E/F$ la projection canonique.

1. *Montrer que l'application $G \mapsto \pi(G)$ induit une bijection croissante entre l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant F et l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E/F. Quelle est sa bijection réciproque ?*
2. *Construire un isomorphisme entre $F/(F \cap G) = (F + G)/G$.*
3. *On suppose $F \subseteq G$. Montrer que G/F s'identifie à un sous-espace vectoriel de E/F et construire un isomorphisme entre $(E/F)/(G/F)$ et E/G.*

3 Exercice 3. *Changement de base duale*

Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathbf{e} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $\mathbf{f} = (f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux bases de E, et $\mathbf{e}^* = (e_i^*)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $\mathbf{f}^* = (f_i^*)_{i\in[\![1,n]\!]}$ leurs bases duales respectives. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{f}$.

1. *Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on écrit $e_j^* = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} f_i^*$ avec $\alpha_{i,j} \in \Bbbk$, pour tout $1 \le i,j \le n$. Déterminer $A' = (\alpha_{i,j})_{i,j}$ en fonction de A.*

2. *En déduire la matrice de passage de $\mathbf{e}^*$ à $\mathbf{f}^*$ en fonction de A.*

1.

Table des matières