Groupe symétrique

1 Exercice 1.

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_9$*. Déterminer sa décomposition canonique en produit de cycles disjoints, son ordre, sa signature, une décomposition en produit de transposition ainsi que* σ^{100}*.*

On a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 \end{pmatrix}$. Son ordre est le PPCM des ordres précédent, c'est donc 12. Sa signature est $(-1) \times 1 \times (-1) = 1$. On décompose en produit de transposition chaque cycle et on conclut. On calcule

$$\sigma^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 3 & 9 \end{pmatrix}^{100},$$

car les cycles à supports disjoints commutent, et donc

$$\sigma^{100} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2 Exercice 2. *Générateurs de* $\mathfrak{A}_n$

Soit $n \geq 3$*.*

1. *Rappeler pourquoi* $\mathfrak{A}_n$ *est engendré par les* 3*-cycles.*
2. *Démontrer que* $\mathfrak{A}_n$ *est engendré par les carrés d'éléments de* $\mathfrak{S}_n$*. Est-ce que tout élément de* $\mathfrak{A}_n$ *est un carré dans* $\mathfrak{S}_n$ *?*
3. *Démontrer que pour* $n \geq 5$, $\mathfrak{A}_n$ *est engendré par les bitranspositions.*
4. *Démontrer que* $\mathfrak{A}_n$ *est engendré par les* 3*-cycles de la forme* $(1\ 2\ i)$ *pour* $i \in [\![3, n]\!]$*.*

5. *En déduire que si $n \geq 5$ est impair, alors $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les permutations $(1\ 2\ 3)$ et $(3\ 4\ \cdots\ n)$ et que si $n \geq 4$ est pair, alors $\mathfrak{A}_n$ est engendré par $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 2)(3\ 4\ \cdots\ n)$.*

1. On utilise le fait que tout $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ se décompose comme produit d'un nombre pair de transpositions. Puis, on utilise les égalités
   - $(i\ j)(i\ k) = (i\ j\ k)$,
   - $(i\ j)(i\ j) = \mathrm{id}$,
   - $(i\ j)(k\ \ell) = (i\ \ell\ k)(i\ j\ k)$,

   pour déterminer un produit de 3-cycles égal à σ.
2. On utilise la question précédente. Soit $(a\ b\ c)$ un 3-cycle. On a alors $(a\ b\ c)^4 = (a\ b\ c)$, et donc $\sigma = (a\ b\ c)^2$. Ceci permet d'en déduire que les carrés de permutations engendrent $\mathfrak{A}_n$.

3 Exercice 3.

Soit $n \leq 5$. Démontrer que deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont même ordre et même signature. Vérifier que c'est faux si $n = 6$.

Table des matières