# Actions de groupes et théorèmes de Sylow

## 1 Exercice 1.

*Soit $G$ un groupe infini possédant un sous-groupe strict d'indice fini. Montrer que $G$ n'est pas simple.*

Soit $H \lneq G$ un groupe tel que $[G : H]$ est fini.

L'idée est que l'on réalise l'action $G \curvearrowright G/H$ avec $g \cdot xH := (gx)H$. On considère le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathfrak{S}(G/H) \\ g &\longmapsto (xH \mapsto g \cdot xH). \end{aligned}$$

On a $\ker \varphi \lhd G$ et $\ker \varphi \neq \{e\}$ par cardinalité. En effet, $\#G = +\infty$ et puis $\#\mathfrak{S}(G/H) = [G : H]!$ qui est fini.

Montrons que $\ker \varphi \neq G$. Si $g \in \ker \varphi$ alors pour tout $g' \in G$, on a

$$gg'H = g'H,$$

ce qui est vrai si et seulement si $(g')^{-1}gg' \in H$. En particulier pour $g' := e$, on a $g \in H$. Mais $H$ est un sous-groupe strict de $G$ d'où $\ker \varphi \neq G$.

On en conclut que $G$ n'est pas simple.

## 2 Exercice 2. *Nombre de sous-espaces vectoriels*

*Soient $\Bbbk$ un corps fini de cardinal $q$ et $m \leq n$ deux entiers. Notons $X$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension $m$ de $\Bbbk^n$. En étudiant l'action de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ sur $X$, calculer le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension $m$ de $\Bbbk^n$.*

## 3 Exercice 3.

*Soit $G$ un groupe fini.*

**1.** *Soit $p$ un nombre premier qui divise l'ordre de $G$ et soit $S$ un $p$-Sylow de $G$. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- **a)** *$S$ est l'unique $p$-Sylow de $G$ ;*
- **b)** *$S$ est distingué dans $G$ ;*
- **c)** *$S$ est stable par tout automorphisme de $G$ (on dit que $S$ est un sous-groupe caractétistique de $G$).*

**2.** *On va généraliser ce résultat à d'autres groupes que les $p$-Sylow. Soit $k$ un entier divisant $\#G$ et tek que $k$ est premier à $\frac{\#G}{k}$. On pose $X_k$ l'ensemble des sous-groupes $H \leq G$ d'ordre $k$.*

- **a)** *Montrer que si $X_k$ contient un unique sous-groupe $G$ alors $G$ est caractéristique (et donc distingué).*
- **b)** *Montrer réciproquement que si $H \in X_k$ est distingué alors on a $X_k = \{H\}$.*
  *On pourra considérer la projection $\pi : H' \to G/H$ où $H'$ est un élément de $X_k$.*

**1.**

$$\begin{tikzcd} 1a \arrow[r, Rightarrow, bend right] \arrow[rr, Rightarrow, bend right] & 1b \arrow[l, Rightarrow, bend right] & 1c \arrow[l, Rightarrow, bend right] \end{tikzcd}.$$

▷ « 1a $\implies$ 1b ». Montrons que $S$ est distingué dans $G$. Pour tout $g \in G$, $gSg^{-1}$ est un $p$-Sylow, donc $gSg^{-1} = S$.

- « 1b $\implies$ 1a ». Soient $S$ et $S'$ deux $p$-Sylow. Alors, ils sont conjugués : il existe $g \in G$ tel que $S' = gSg^{-1}$. Or, $S$ est distingué donc $S' = gSg^{-1} = S$.
- « 1a $\implies$ 1c ». Soit $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$. Alors $\#\varphi(S) = \#S$ car $\varphi$ bijectif. D'où $\varphi(S)$ est un $p$-Sylow de $G$ et donc $\varphi(S) = S$.
- « 1c $\implies$ 1b ». Soit $g \in G$ et doit

$$\begin{aligned}\operatorname{Aut}(G) \ni \varphi_g : G &\longrightarrow G\\ h &\longmapsto ghg^{-1}.\end{aligned}$$

  Alors, $\varphi_g(S) = gSg^{-1} = S$ par hypothèse et donc $S \lhd G$.

**2.**

# 4 Exercice 4. *Groupes d'ordre* $pq$

**1.** *Soit $G$ un groupe d'ordre 15.*

  **a)** *Compter le nombre de 3-Sylow et le nombre de 5-Sylow de $G$.*

  **b)** *En déduire que $G$ est forcément cyclique.*

**2.** *Plus généralement, soit $G$ un groupe d'ordre $pq$ avec $p < q$ et où $p, q$ sont premiers.*

  **a)** *On suppose que $q \not\equiv 1 \pmod p$. Démontrer que $G$ est cyclique.*

  **b)** *Exhiber des nombres premiers $p$ et $q$ et un groupe d'ordre $pq$ non abélien.*

1. a) Par les théorèmes de Sylow, on sait que $n_3$, le nombre de 3-Sylow dans $G$ vérifie $n_3 \not\equiv 1 \pmod 3$ et $n_3 \mid 5$, d'où $n_3 = 1$. De même, on a que $n_5 = 1$.

   b) Soit $S_3$ et $S_5$ les uniques 3-Sylow et 5-Sylow de $G$. On sait que $S_3$ contient $e$ et deux éléments d'ordre 3. De même, on sait que $S_5$ contient $e$ et 4 éléments d'ordre 5. De plus, $\#(G \setminus (S_3 \cup S_5)) = 8$ donc si $x \in G \setminus (S_3 \cup S_5)$ alors $x \neq e$ et $x$ n'est pas d'ordre 3 (car sinon $x \in S_3$) et il n'est pas d'ordre 5 pour la même raison. On en déduit que $x$ est d'ordre 15 et $G = \langle x \rangle$.

**2.** **a)** Avec les notations précédentes, on a $n_q \mid p$ et $n_q \equiv 1 \pmod q$ donc $n_q \in \{1, p\}$. De plus, $p < q$ donc $p \not\equiv 1 \pmod q$ d'où $n_q = 1$. De même, $n_p \equiv 1 \pmod p$ et $n_p \mid q$ d'où $n_p \in \{1, q\}$. Or, $q \not\equiv 1 \pmod p$ et donc $n_p = 1$.

Soient $S_p$ et $S_q$ les uniques $p$- et $q$-Sylow de $G$. Ainsi

- ▷ $S_p$ contient $e$ est $(p-1)$ éléments d'ordre $p$ ;
- ▷ $S_q$ contient $e$ est $(q-1)$ éléments d'ordre $q$.

Et,

$$\#(G \backslash S_p \cup S_q) = pq - 1 - (p-1) - (q-1) = (p-1)(q-1) > 0.$$

Si $x \in G \backslash (S_p \cup S_q) \neq \emptyset$ alors $x$ n'est pas d'ordre 1, ni $p$ ni $q$. D'où $\operatorname{ord} x = pq$ (par Lagrange) et donc $G = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

**b)** Avec $p = 2$ et $q = 3$ on a $3 \equiv 1 \pmod 2$ mais

$$G = \mathfrak{S}_3 \not\cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

# 5 Exercice 5. *Théorèmes de Sylow et simplicité des groupes*

*Soit $G$ un groupe.*

**1.** **a)** *Montrer que si $\#G = 20$ alors $G$ n'est pas simple.*

**b)** *Plus généralement, montrer que si $\#G = p^a k$ avec $p$ premier et $k$ un entier non divisible par $p$ et $1 < k < p$, alors $G$ n'est pas simple.*

**2.** *Montrer que si $\#G = 40$ alors $G$ n'est pas simple (fonctionne aussi avec $\#G = 45$).*

**3.** *En faisant agir $G$ par conjugaison sur l'ensemble de ses $p$-Sylow pour un $p$ bien choisi, montrer que si $\#G = 48$ alors $G$ n'est pas simple.*

**4.** *(Plus difficile) Montrer que si $\#G = 30$ ou $56$, alors $G$ n'est pas simple.*

**5.** *Conclure qu'un groupe simple de cardinal non premier est d'ordre au moins 60.*

1. a) On a $\#G = 2^2 \times 5$ donc on a $n_5 = 1$. Par l'3, on sait qu'il existe un unique 5-Sylow et donc qu'il est distingué.
   b) Pour $\#G = p^a k$ avec $p \nmid k$ et $1 < k < p$ on a $n_p \mid k$ d'où $n_p \leq k$. De plus, $n_p \equiv 1 \pmod p$ donc si $n_p \neq 1$ alors $n_p \geq p+1 > k$, ***absurde***. On en déduit que $n_p = 1$ et donc que l'unique $p$-Sylow est distingué. On en conclut que $G$ n'est pas simple.
2. On a $n_5 \mid 8$ et $n_5 \equiv 1 \pmod 5$ donc $n_5 = 1$. On procède comme précédemment.
3. On a $\#G = 48 = 2^3 \times 3$. On sait que $n_2 \in \{1,3\}$ et $n_3 \in \{1,4,16\}$. On fait agir $G$ sur $\mathrm{Syl}_2(G)$ l'ensemble des 2-Sylow de $G$ par :
$$g \cdot S := gSg^{-1}.$$
Ceci induit un morphisme
$$\varphi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_{n_2}.$$
On a deux cas :
   - si $n_2 = 1$, alors on a fini ;
   - si $n_2 = 3$ alors $\ker \varphi \neq \{e\}$ (car $\#G = 48$ et $\#\mathfrak{S}_3 = 3! = 6$) et, de plus, par les théorèmes de Sylow, l'action est transitive, d'où $\ker\varphi \lhd G$ et $\{e\} \neq \ker\varphi \neq G$ d'où $G$ n'est pas simple.

# 6 Exercice 6.

*Soit $G$ un groupe fini simple d'ordre supérieur ou égal à 3.*

1. *Soit $H \lneq G$ un sous-groupe strict de $G$. Montrer qu'il existe un morphisme injectif $\varphi : G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G/H)$ et donc que $\#G \mid [G:H]!$. (Indication : faire agir $G$ sur $G/H$.)*
2. *Montrer que $\varphi(G) \subseteq \mathfrak{A}(G/H)$ et donc que $\#G \mid \frac{1}{2}[G:H]!$.*
3. *Soit $p$ un nombre premier divisant $\#G$. On note $n_p$ le nombre de $p$-Sylow de $G$.*
   a) *Montrer qu'il existe un morphisme injectif $\varphi_p : G \hookrightarrow \mathfrak{A}_{n_p}$ et donc que $\#G \mid \frac{1}{2} n_p!$.*

***b)*** *En déduire qu'un groupe d'ordre 80 ou 112 n'est pas simple.*

1. On fait agir $G$ sur $G/H$ en posant $g \cdot (g'H) := (gg')H$. Ceci induit un morphisme $\varphi : G \to \mathfrak{S}(G/H)$. Il est injectif car $\ker \varphi \lhd G$ donc, par simplicité de $G$,
   - ▷ $\ker \varphi = \{e\}$ ;
   - ▷ $\ker \varphi = G$ mais l'ordre de $G$ est supérieur à 3 donc $\varphi$ est non-nulle.

   Enfin, par le premier théorème d'isomorphisme :
   $$G/\ker \varphi = G \cong \operatorname{im} \varphi \leq \mathfrak{S}(G/H),$$
   d'où $\#G \mid [G : H]!$ par cardinalité et Lagrange.
2. Montrons que $\varphi(G) \subseteq \mathfrak{A}(G/H)$ en montrant $\varphi^{-1}(\mathfrak{A}(G/H)) = G$. On sait que $\mathfrak{A}(G/H) \lhd \mathfrak{S}(G/H)$ d'où $\varphi^{-1}(\mathfrak{A}(G/H)) \lhd G$. Par cardinalité, il est impossible que $\varphi^{-1}(\mathfrak{A}(G/H)) = \{e\}$. On en conclut que $\varphi^{-1}(\mathfrak{A}(G/H)) = G$.

# Table des matières