DM n°2 – Algèbre 1

Hugo SALOU
Dept. Informatique

ENS DE LYON

9 avril 2025

Exercice 1.

1. L'idée est de montrer que les polynômes racines non réelles d'un polynôme réel sont deux à deux conjuguées, et qu'elles (une racine et sa racine conjuguée) ont même multiplicité. Fixons une racine α_i non réelle, et posons $P = \sum_{j=0}^{n} p_j X^j$ la décomposition de P en monômes. Alors, on a $\sum_{j=0}^{n} p_j \alpha_i^j = 0$ et donc, en passant au conjugué, $\sum_{j=0}^{n} \bar{p}_j \bar{\alpha}_i^j = \bar{0}$. Et, comme les coefficients sont réels, on en déduit que $\sum_{j=0}^{n} p_j \bar{\alpha_i}^j = 0$ et donc $\bar{\alpha}_i$ est aussi une racine de P. Ceci fonctionne quel que soit le polynôme P. Ensuite, en posant $P = (X - \alpha_i)(X - \bar{\alpha}_i)Q$, on peut appliquer un même raisonnement sur Q. D'où, par récurrence décroissante sur la multiplicité m_i, on a que α_i et $\bar{\alpha}_i$ ont même multiplicité.

   Ceci justifie que
$$J^* = \{i \in [\![1, d]\!] \mid \bar{\alpha}_i = \alpha_j \text{ avec } j \in J\}$$
   et
$$J = \{i \in [\![1, d]\!] \mid \bar{\alpha}_i = \alpha_j \text{ avec } j \in J^*\}.$$

   Ainsi, pour R et S deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$,
$$\begin{aligned}
\phi(R, S) &= \overbrace{\sum_{i \in I} m_i R(\alpha_i) S(\alpha_i)}^{\in \mathbb{R}} + \sum_{i \in J \cup J^*} m_i R(\alpha_i) S(\alpha_i) \\
&= \sum_{i \in I} m_i R(\alpha_i) S(\alpha_i) + \sum_{i \in J} m_i \big(R(\alpha_i) S(\alpha_i) + R(\bar{\alpha}_i) S(\bar{\alpha}_i)\big) \\
&= \sum_{i \in I} m_i R(\alpha_i) S(\alpha_i) + \sum_{i \in J} m_i \underbrace{\big(R(\alpha_i) S(\alpha_i) + \overline{R(\alpha_i) S(\alpha_i)}\big)}_{2\mathrm{Re}\big(R(\alpha_i)S(\alpha_i)\big) \in \mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

   D'où on a bien $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$.

2. **a)** Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ se décompose, de manière unique, en deux polynômes à coefficients réels P_1, P_2 tels que $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$. (On décompose chaque coefficient en partie réelle/imaginaire et on crée ainsi P_1 et P_2.) On note ainsi $\mathrm{Re}(P) = P_1$ et $\mathrm{Im}(P) = P_2$. Ainsi, on définit les applications

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} H_1 & \longrightarrow & H_2 \\ f & \longmapsto & \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{C} \\ P = P_1 + \mathrm{i}P_2 & \mapsto & f(P_1) + \mathrm{i}f(P_2), \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} H_2 & \longrightarrow & H_1 \\ f & \longmapsto & \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & f(P). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Vérifions la $\mathbb{C}$-linéarité de ces deux applications, puis qu'elles sont l'inverse l'une de l'autre.

▷ Si $f, g \in H_1$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors, pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, où $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda f + \mu g)(P) =& (\lambda f + \mu g)(P_1) + \mathrm{i}(\lambda f + \mu g)(P_2) \\ =& \lambda\big(f(P_1) + \mathrm{i}f(P_2)\big) + \mu\big(g(P_1) + \mathrm{i}g(P_2)\big) \\ =& \lambda\Phi(f)(P) + \mu\Phi(g)(P). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai quel que soit P, on en déduit que Φ est $\mathbb{C}$-linéaire.

▷ Si $f, g \in H_2$ et $\lambda, \mu \in C$, alors, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a que

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda f + \mu g)(P) &= (\lambda f + \mu g)(P) \\ &= \lambda f(P) + \mu g(P) \\ &= \lambda\Psi(f)(P) + \mu\Psi(g)(P), \end{aligned}$$

d'où la $\mathbb{C}$-linéarité de Ψ.

▷ Si $f \in H_1$, alors pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\Psi(\Phi(f))(P) = \Phi(f)(P) = f(P) + \mathrm{i}f(0) = f(P),$$

par $\mathbb{R}$-linéarité de f. D'où $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{H_1}$

▷ Si $f \in H_2$, alors pour tout $P = P_1 + \mathrm{i}P_2 \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$,

$$\begin{aligned}\Phi(\Psi(f))(P) &= \Psi(f)(P_1) + \mathrm{i}\Psi(f)(P_2)\\ &= f(P_1) + \mathrm{i}f(P_2)\\ &= f(P),\end{aligned}$$

par $\mathbb{C}$-linéarité de f. D'où $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{H_2}$.

On en conclut que Φ est un isomorphisme de H_1 à H_2.

Pour montrer que les formes $(\mathrm{ev}_{\alpha_i})_{i \in [\![1,d]\!]}$ sont linéairement indépendantes dans H_1, on vérifie (de manière équivalente, par isomorphisme) que $(\Phi(\mathrm{ev}_{\alpha_i}))_{i\in[\![1,d]\!]}$ sont linéairement indépendantes dans H_2. Or, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, et tout polynôme $P = P_1 + \mathrm{i}P_2 \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on a

$$\Phi(\mathrm{ev}_{\alpha_i})(P) = P_1(\alpha_i) + \mathrm{i}P_2(\alpha_i) = \widetilde{\mathrm{ev}}_{\alpha_i}(P),$$

où $\widetilde{\mathrm{ev}}_x : \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}$ est la fonction d'évaluation d'un polynôme complexe en x. Et, on sait que les $(\widetilde{\mathrm{ev}}_{\alpha_i})_{i\in[\![1,d]\!]}$ sont linéairement indépendantes dans H_2 car les $(\alpha_i)_{i\in[\![1,d]\!]}$ sont distinctes. On en déduit que les $(\mathrm{ev}_{\alpha_i})_{i\in[\![1,d]\!]}$ sont linéairement indépendantes dans H_1.

b) On a trois cas à traiter. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, avec la décomposition en monômes $Q = \sum_{k=0}^n q_k X^k$, où les q_k sont nuls pour $k > \deg Q$.

▷ Soit $i \in I$. Alors, $\mathrm{ev}_{\alpha_i}(Q) = Q(\alpha_i) \in \mathbb{R}$ car $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

▷ Soit $i \in J$. Alors,

$$\mathrm{ev}_{\alpha_i}(Q) + \mathrm{ev}_{\bar{\alpha}_i}(Q) = \sum_{k=0}^n q_k \underbrace{\left(\alpha_i^k + \bar{\alpha}_i^k\right)}_{2\mathrm{Re}(\alpha_i^k)} \in \mathbb{R}.$$

▷ Soit $i \in J^*$. Alors,

$$\mathrm{i}(\mathrm{ev}_{\alpha_i} - \mathrm{ev}_{\bar{\alpha}_i})(Q) = \sum_{k=0}^n q_k \mathrm{i} \underbrace{\left(\alpha_i^k - \bar{\alpha}_i^k\right)}_{2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\alpha_i^k) \in \mathrm{i}\mathbb{R}} \in \mathbb{R}.$$

Dans chacun des cas, on a montré que ϕ_i est à valeurs réelles.

Pour montrer que $(\phi_i)_{i\in[\![1,d]\!]}$ est $\mathbb{R}$-libre, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ des <u>réels</u> tels que

$$\lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d = 0,$$

d'où

$$(\star) : \quad 0 = \sum_{i\in I} \lambda_i \mathrm{ev}_{\alpha_i} + \sum_{j\in J} (\lambda_j - \mathrm{i}\lambda_{j^*})\mathrm{ev}_{\alpha_j} + \sum_{j^*\in J^*} (\lambda_j + \mathrm{i}\lambda_{j^*})\mathrm{ev}_{\alpha_{j^*}},$$

où l'on note j^* l'unique élément de J^* tel que $\alpha_{j^*} = \bar{\alpha}_j$ (et inversement pour j à partir de $j^* \in J^*$). On évalue $(\star)$

- ▷ en α_i pour $i \in I$, ce qui donne $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$;
- ▷ en α_j pour $j \in J$, ce qui donne $\lambda_j = \mathrm{i}\lambda_{j^*}$ quel que soit l'entier $j \in J$, ceci implique donc que $\lambda_j = \lambda_{j^*} = 0$ pour tout $j \in J$ car $\lambda_j \in \mathbb{R}$;

On en conclut que

- ▷ pour $i \in I$, $\lambda_i = 0$;
- ▷ pour $j \in J$, $\lambda_j = 0$;
- ▷ pour $j^* \in J^* = \{j^* \mid j \in J\}$, $\lambda_{j^*} = 0$.

On en conclut que la famille $(\phi_i)_{i\in[\![1,d]\!]}$ est $\mathbb{R}$-libre.

3. Pour $R \in E$, on a

$$q(R) = \phi(R,R) = \sum_{i\in I} m_i\phi_i(R)^2 + \sum_{j\in J} m_j(\phi_j(R)^2 - \phi_{j^*}(R)^2), \tag{0.1}$$

car

$$\phi_i(R)^2 = \begin{cases} \mathrm{ev}_{\alpha_i}(R)^2 & \text{si } i \in I \\ \mathrm{ev}_{\alpha_i}(R)^2 + \mathrm{ev}_{\alpha_{i^*}}(R)^2 + 2\mathrm{ev}_{\alpha_i}(R)\mathrm{ev}_{\alpha_{i^*}}(R) & \text{si } i \in J \\ -\mathrm{ev}_{\alpha_i}(R)^2 - \mathrm{ev}_{\alpha_{i^*}}(R)^2 + 2\mathrm{ev}_{\alpha_i}(R)\mathrm{ev}_{\alpha_{i^*}}(R) & \text{si } i \in J^*. \end{cases}$$

On applique ensuite le théorème d'inertie de Sylvester (car on est dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E isomorphe à $\mathbb{R}^n$) : la décomposition 0.1 à l'aide de la famille libre $(m_i\phi_i)_{i\in[\![1,d]\!]}$ (car pas de racine à multiplicité nulle) nous donne que la signature (r, s) de ϕ est $(\#I + \#J, \#J)$. Finalement, on sait par dénombrement que $r+s = \#(I \sqcup J \sqcup J^*) = d$ est le nombre de racines distinctes de P et $r - s = \#((I \sqcup J) \setminus J) = \#I$ est le nombre de racines réelles de P.

Exercice 2.

On notera $\Bbbk$ le corps de caractéristique supérieure à 2, et E le $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Comme q et q' sont proportionnelles et toutes deux non dégénérées, il existe $\lambda \in \Bbbk^\times$ tel que $q = \lambda q'$. Soit $x \in E$. On a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{C}_q &\iff q(x) = 0 \\ &\iff \lambda q'(x) = 0 \\ &\iff q'(x) = 0 \text{ car } \lambda \neq 0 \\ &\iff x \in \mathscr{C}_{q'}. \end{aligned}$$

   On a donc $\mathscr{C}_q = \mathscr{C}_{q'}$.

2. On commence par calculer, pour $\alpha \in \Bbbk$,

$$q(\alpha u + v) = \cancel{\alpha^2 q(u)} + q(v) + 2\alpha\, \varphi(u, v).$$

   a) On procède en deux temps.
      - ▷ Premièrement, on suppose $v \in \mathscr{C}_q$ et on montre ainsi l'inclusion $D_{u,v} \subseteq \mathscr{C}_q$. En effet, pour tout $\alpha \in \Bbbk$, on a

$$q(\alpha u + v) = \underbrace{\cancel{q(v)}}_{v \in \mathscr{C}_q} + 2\alpha \underbrace{\cancel{\varphi(u, v)}}_{v \in H_u} = 0,$$

        d'où $\alpha u + v \in \mathscr{C}_q$.
      - ▷ Deuxièmement, on suppose $v \notin \mathscr{C}_q$ et, par l'absurde, soit $\alpha u + v \in \mathscr{C}_q \cap D_{u,v}$. Alors,

$$q(v) = q(\alpha u + v) + 2\alpha\, \cancel{\varphi(u, v)} = 0 + 0$$

        et donc $v \in \mathscr{C}_q$; ***absurde***. D'où, $\mathscr{C}_q \cap D_{u,v} = \emptyset$ si $v \notin \mathscr{C}_q$.

b) On procède par équivalence. Soit $\alpha \in \Bbbk$.

$\alpha u+v \in \mathscr{C}_q \iff q(\alpha u+v)=0 \iff q(v) = -2\alpha\varphi(u,v)$.

Or, $2\varphi(u,v)$ est non nul car : $\operatorname{car}(\Bbbk) > 2$ et $v \notin H_u$. D'où,

$$\alpha u + v \in \mathscr{C}_q \iff \alpha = -\frac{q(v)}{2\varphi(u,v)} =: \alpha^\star.$$

Ceci implique que $D_{u,v} \cap \mathscr{C}_q$ est réduit au point $\alpha^\star u + v$.

3. a) Le raisonnement de la question 2 peut également s'appliquer à q' en remplaçant $\mathscr{C}_q$ par $\mathscr{C}_{q'}$ et H_u par $H_{u'}$. On a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} v \in H_u &\iff \mathscr{C}_q \cap D_{u,v} \text{ n'est pas réduit à un seul point} \\ &\iff \mathscr{C}_{q'} \cap D_{u,v} \text{ n'est pas réduit à un seul point} \\ &\iff v \in H'_u. \end{aligned}$$

Dans cette équivalence, on utilise le fait que $D_{u,v}$ n'est pas réduit à un seul point. On en conclut $H_u = H'_u$. Mais, par définition d'hyperplan orthogonal à u, on a

$$\ker \varphi(u,\cdot) = H_u = H'_u = \ker \varphi'(u,\cdot).$$

Ceci implique que $\varphi(u,\cdot)$ et $\varphi'(u,\cdot)$ sont proportionnelles et ainsi il existe $\lambda_u \in \Bbbk^\times$ (non nul pour garantir l'égalité des noyaux) tel que

$$\varphi'(u,\cdot) = \lambda_u\, \varphi(u,\cdot).$$

b) Supposons $v \notin H_u$. D'une part, par l'égalité des cônes, on sait que $\mathscr{C}_q \cap D_{u,v} = \mathscr{C}_{q'} \cap D_{u,v}$. D'autre part, par la question 2b, ces deux intersections sont réduites à un seul point. Il y a donc égalité de ces deux points :

$$v - \frac{q(v)}{2\varphi(u,v)} u = v - \frac{q'(v)}{2\varphi'(u,v)} u.$$

D'où, car $u \neq \{0\}$,

$$\varphi(u,v)\, q(v) = \lambda_u \varphi(u,v) q'(v),$$

et parce que $u \notin H_u$, on peut simplifier par $\varphi(u,v)$. On en déduit $q'(v) = \lambda_u\, q(v)$

4. **a)** Supposons $v + w \in H_u$ et montrons que l'on a nécessairement $v + 2w \notin H_u$. Ainsi, $\varphi(u, v + w) = 0$ et alors,

$$\varphi(u, v + 2w) = \varphi(u, v + w) + \varphi(u, w) = \varphi(u, w) \underset{(*)}{\neq} 0,$$

où $(*)$ est vérifié car $w \notin H_u$. D'où, $v + 2w \neq 0$.

b) On applique l'identité de polarisation en utilisant la question 3b.

D'une part, on suppose $v + w \notin H_u$, pour pouvoir appliquer 3b. On peut utiliser l'identité de polarisation parce que $(\operatorname{car} \Bbbk) > 2$. On a

$$\begin{aligned}\varphi'(v, w) &= \frac{1}{2}\big(q'(v + w) - q'(v) - q'(w)\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\lambda_u q(v + w) - \lambda_u q(v) - \lambda_u q(w)\big)\\ &= \lambda_u \cdot \frac{1}{2}\big(q(v + w) - q(v) - q(w)\big)\\ &= \lambda_u\, \varphi(v, w).\end{aligned}$$

Supposons alors $v+2w \notin H_u$ (disjonction de cas 4a). Ainsi,

$$q'(v + 2w) = q'(v) + 4\varphi'(v, w) + 4q'(w),$$

d'où, où l'on remplace $q'(\cdot)$ par $\lambda_u q(\cdot)$ car $v, w, v+2w \notin H_u$, et donc

$$4\varphi'(v, w) = \lambda_u q(v + 2w) - \lambda_u q(v) - 4\lambda_u q(w) = 4\lambda_u\, \varphi(v, w).$$

Et, 4 est inversible car (par l'absurde) $2 \times 2 = 4$ et $\Bbbk$ est un anneau intègre et $(\operatorname{car} k) > 2$ donc 2 non nul. D'où, l'égalité $\varphi'(v, w) = \lambda_u\, \varphi(v, w)$.

5. Soit $n+1$ la dimension de E. On considère une base $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de H. Complétons cette base en une base de E avec $\mathscr{B} = (v_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, où $v_0 \notin H$. De plus, considérons $\ell : E \to \Bbbk$ une forme linéaire telle que $\ker \ell = H$.

Ainsi, on pose $e_i = v_i + v_0$ pour $i > 0$ et $e_0 = v_0$. La famille, notée $\mathscr{B}' = (e_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, forme une base de E. De plus, chacun des vecteurs n'est pas dans H. En effet, pour e_0, c'est par hypothèse. Et, pour e_i avec $i \geq 1$, on a

$$\ell(e_i) = \underbrace{\cancel{\ell(v_i)}}_{v_i \in \ker \ell} + \ell(v_0) = \ell(v_0) \neq 0$$

car $v_0 \notin H = \ker \ell$. On en conclut que l'on a bien construit une base de E dont aucun vecteur n'est dans H.

Considérons $H := H_u$, et la base obtenue par la construction précédente. Pour tout $i, j \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\varphi'(e_i, e_j) = \lambda_u \, \varphi(e_i, e_j),$$

car $e_i, e_j \notin H$. D'où, par bilinéarité, tout $x, y \in E$, avec la décomposition $x = x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n$ et $y = y_0 e_0 + \cdots + y_n e_n$, on a

$$\varphi'(x, y) = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} x_i y_j \varphi'(e_i, e_j) = \lambda_u \sum_{i,j \in [\![0,n]\!]} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \lambda_u \, \varphi(x, y).$$

On termine avec, quel que soit $x \in E$

$$q'(x) = \varphi'(x, x) = \lambda_u \, \varphi(x, x) = \lambda_u \, q(x),$$

où $\lambda_u \in \mathbb{k}^\times$ est constant, d'où q et q' sont proportionnelles.

Exercice 3.

On notera $\Bbbk$ le corps de caractéristique supérieure à 2, et E le $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie.

1. On procède en 4 temps.
   - ▷ « (i) $\implies$ (ii) ». Dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ (en l'occurrence, c'est $(\Phi^{-1}((1,0)), \Phi^{-1}((0,1)))$ en notant Φ l'isomorphisme), la matrice de q s'écrit
   $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
   car
   $$\varphi(ue_1+ve_2, we_1+xe_2) = \frac{1}{2}((u+w)(v+x)-uv-wx) = \frac{1}{2}(ux+wv).$$
   On pose $a = 0$ puis $\mathscr{B}' = (2e_1, e_2)$, et la matrice s'écrit bien
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$
   - ▷ « (ii) $\implies$ (i) ». Considérons une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ dans laquelle la matrice de q s'écrit
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},$$
   avec $a \in \Bbbk$. Considérons la base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2)$ définie par
   $$f_1 = e_1 \qquad \text{et} \qquad f_2 = e_2 - \frac{a}{2}e_1.$$
   Dans cette base, on a

- $\varphi(f_1, f_1) = \varphi(e_1, e_1) = 0$;
- $\varphi(f_2, f_2) = \varphi(e_2, e_2) - a\varphi(e_1, e_2) + (a/2)^2\varphi(e_1, e_1)$ qui est nul car $\varphi(e_2, e_2) = a$ et $\varphi(e_1, e_2) = 1$;
- $\varphi(f_1, f_2) = \varphi(e_1, e_2) - a\varphi(e_1, e_1)/2 = 1 - 0 = 1$ et de même par symétrie de φ.

On en conclut que la matrice s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est donc que l'on a bien l'isomorphisme avec $(\mathbb{k}^2, q')$ (il suffit de diviser un des vecteurs de la base par 2 pour obtenir le facteur $\frac{1}{2}$).

▷ « (i) $\implies$ (iii) ». Comme pour l'implication (i) $\implies$ (ii), supposons qu'il existe $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ dans laquelle la matrice de q s'écrit

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons une nouvelle base (f_1, f_2) définie par

$$f_1 = e_1 + e_2 \qquad \text{et} \qquad f_2 = e_1 - e_2,$$

où l'on a

- $\varphi(f_1, f_1) = 2\varphi(e_1, e_2) = 1$;
- $\varphi(f_2, f_2) = -2\varphi(e_1, e_2) = -1$;
- $\varphi(f_1, f_2) = \varphi(e_1, e_2) - \varphi(e_2, e_1) = 0.$

Dans cette base, la matrice de q s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

▷ « (iii) $\implies$ (i) ». Soit (e_1, e_2) la base dans laquelle q s'écrit comme la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1, -1)$. On pose la base (f_1, f_2) définie par

$$f_1 = \frac{e_1 + e_2}{2} \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{e_1 - e_2}{2}.$$

On a donc

- $\varphi(f_1, f_1) = 1^2 - 1^2 = 0$;
- $\varphi(f_2, f_2) = 1^2 - 1^2 = 0$;
- $\varphi(f_1, f_2) = \varphi(e_1, e_1)/2 - \varphi(e_2, e_2)/2 = 2/2 = 1$.

On obtient donc bien la matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est donc que l'on a bien l'isomorphisme avec $(\mathbb{k}^2, q')$ (il suffit de diviser un des vecteurs de la base par 2 pour obtenir le facteur $\frac{1}{2}$).

Ceci démontre bien

$$\text{(ii)} \iff \text{(i)} \iff \text{(iii)}.$$

2. On procède par double implications.
   - ▷ « $\implies$ ». Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B}$, que l'on indice $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$, dans laquelle la matrice de q est égale à
   $$\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_n \end{pmatrix}.$$
   Définissions les plans par $P_i = \mathrm{Vect}(e_i, f_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Par construction à partir de la base $\mathscr{B}$, on a bien
   $$E = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n.$$
   Montrons que les plans sont deux-à-deux orthogonaux. Soient $i \neq j$ avec $i, j \in [\![1, m]\!]$. L'orthogonalité des deux plans P_i et P_j découle du fait que les vecteurs de bases de P_i et ceux de P_j sont deux à deux orthogonaux par l'interprétation matricielle. Les plans sont donc bien deux à deux orthogonaux. Il reste à démontrer que chaque plan vérifie les conditions de la question 1. La matrice de $q_{|P_i}$ dans la base $\mathscr{B}_i = \{e_i, f_i\}$ de P_i est égale à
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
   ce qui valide la condition (ii). Ceci permet de conclure que q est hyperbolique.

▷ « $\Longleftarrow$ ». Supposons q hyperbolique. Considérons la décomposition en plans de E

$$E = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$$

telle que, les plans sont deux-à-deux orthogonaux et que chaque plan vérifie les conditions de la question 1. On construit une base $\mathscr{B}_i = \{e_i, f_i\}$ de chacun des plan P_i, puis on pose les deux familles $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ et $\mathscr{C} = \{e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_n, f_n\}$, qui sont deux bases de l'espace E. Par orthogonalité des plans et par la question 1, on sait que dans la base $\mathscr{C}$, la matrice de q est diagonale par blocs

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(q) = \begin{pmatrix} M & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & M \end{pmatrix}$$

où chaque bloc diagonal vaut

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par changement de base (il suffit de réorganiser les lignes et les colonnes) de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$, on obtient :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_m & 0_n \end{pmatrix}.$$

D'où l'équivalence.

3. **a)** Soit $x \in S$. Montrons que $x \in S^\perp$. Soit $y \in S$, et alors

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(\overbrace{x+y}^{\in S}) - q(x) - q(y)\big) = 0,$$

car $S \subseteq \mathscr{C}_q$. On en déduit que $x \in S^\perp$ et donc $S \subseteq S^\perp$. Ainsi, comme q est non dégénérée et E de dimension finie, on a

$$\dim S^\perp = \dim E - \dim S \quad \text{et} \quad \dim S \le \dim S^\perp,$$

d'où,

$$2(\dim S) \leq \dim E.$$

b) Soit $x \in S$ et $y \in F$. On a $\varphi(x,y) = 0$ car $x \in S$ et $y \in S^\perp$. D'où l'inclusion $S \subseteq F^\perp$.

c) D'une part, on a l'inclusion $\ker \Phi \subseteq G^\perp$. En effet, si $\Phi(x)(y) = \varphi(x,y) = 0$ pour tout $y \in G$, alors $x \in G^\perp$. Et, on sait que $x \in S \subset S^\perp$. Ainsi, pour $a \in G$ et $b \in S$, alors

$$\varphi(x, a+b) = \varphi(x,a) + \varphi(x,b) = 0 + 0 = 0,$$

car $x \in G^\perp$ et $x \in S^\perp$. D'où, $x \in (G+S)^\perp = F^{\perp\perp} = F$ car q non dégénérée en dimension finie. Ainsi $x \in F \cap S = \{0\}$ car somme directe. On en conclu que $\ker \Phi = \{0\}$ l'application est donc injective.

D'autre part, on a égalité des dimensions. En effet, on a

$$\dim F + \dim S = \dim S^\perp = \dim E - \dim S,$$

car q non dégénérée en dimension finie et somme directe $F \oplus S = S^\perp$. D'où,

$$\dim F = \dim E - 2\dim S.$$

De même, on a

$$\dim G + \dim S = \dim E - \dim F,$$

donc

$$\begin{aligned}\dim G^* &= \dim G \\ &= \dim E - (\dim E - 2\dim S) - \dim S \\ &= \dim S.\end{aligned}$$

D'où Φ est un isomorphisme.

d) On considère $(h_1, \ldots, h_m)$ une base orthogonale de G. Et, parce que Φ est un isomorphisme et $(h_1^*, \ldots, h_m^*)$ est une base de G^*, on a que $(\Phi^{-1}(h_1^*), \ldots, \Phi^{-1}(h_m^*))$ est une base de S. Pour construire une base $\mathscr{B}$ de $F^\perp = G \oplus S$, on considère

$$\mathscr{B} = (\Phi^{-1}(h_1^*), \ldots, \Phi^{-1}(h_m^*), h_1, \ldots, h_m).$$

Ainsi, par construction, la matrice de $q_{|F^\perp}$ dans $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où

- ▷ $d_{i,j} = \varphi(h_i, h_j)$, qui est nul si $i \neq j$ (base orthogonale) ;
- ▷ $a_{i,j} = \varphi(\Phi^{-1}(h_i^*), \Phi^{-1}(h_j^*)) = 0$ car le premier vecteur est dans S et le second est dans $S \subseteq S^\perp$;
- ▷ $b_{i,j} = \varphi(\Phi^{-1}(h_i^*), h_j) = h_i^*(h_j) = \delta_{i,j}$ (où l'on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker) ;
- ▷ de même que $b_{i,j}$ pour $c_{j,i}$ par symétrie de φ.

On en déduit que la matrice de $q_{|F^\perp}$ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0_m & \mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_m & D \end{pmatrix},$$

où D est une matrice diagonale de taille $m \times m$.

On réalise un raisonnement très similaire à la question 2 mais en utilisant (ii) avec a quelconque (au lieu de $a = 0$ comme dans la question 2). En effet, on pose, pour tout entier $i \in [\![1, m]\!]$, le plan $P_i = \mathrm{Vect}(h_i, \Phi^{-1}(h_i^*))$. On sait que la matrice dans chacun de ces plans est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_{i,i} \end{pmatrix},$$

qui vérifie donc les conditions de la question 1. De plus, tous ces plans sont deux à deux orthogonaux par interprétation matricielle de l'orthogonalité des vecteurs de base des deux plans.

On en conclut que $q_{|F^\perp}$ est hyperbolique.

4. On va montrer, par récurrence sur m, que si $V \leq E$ de dimension m, alors il existe $G, H \leq V$ tels que $V = G \oplus H$ avec $q_{|H}$ hyperbolique et $q_{|G}$ anisotrope et $G \perp H$ et $H \subseteq \mathscr{C}_q$.
   - ▷ Pour $\dim V = 0$, il suffit de poser $V = \{0\} = G = H$, et on vérifie clairement les résultats demandés sur G et H.
   - ▷ Pour $\dim V > 0$, soit $x \in \mathscr{C}_q \cap V \setminus \{0\}$ (si cet ensemble est vide, on démontre le résultat aisément en posant $G = V$ et $H = \{0\} = \mathscr{C}_q \cap V$). Alors, parce que $\mathscr{C}_q$ est un cône, on a l'inclusion $\operatorname{Vect} x \subseteq \mathscr{C}_q$.

     On décompose $V = (\operatorname{Vect} x) \overset{\perp}{\oplus} V'$ (cette décomposition est possible en complétant (x) en une base de V et par orthogonalisation de Gram-Schmidt $(\star)$). Par hypothèse de récurrence, il existe $G', H' \leq V'$ orthogonaux tels que la forme $q_{|G'}$ est anisotrope, et la forme $q_{|H'}$ est hyperbolique et $V' = G' \oplus H'$, où l'on a $H' \subseteq \mathscr{C}_q$.

     Ainsi, $H' \oplus (\operatorname{Vect} x) \subseteq \mathscr{C}_q$ et c'est un sous-espace vectoriel, on peut donc lui appliquer la question 3. On considère donc un sous-espace vectoriel $H \leq H' \oplus (\operatorname{Vect} x)$ de dimension maximale tel que $q_{|H}$ est hyperbolique (on a noté $H = F^\perp$ dans la question 3). Et, on lui considère un supplémentaire orthogonal G dans V (qui existe par l'argument $(\star)$). Il ne reste qu'à justifier que $q_{|G}$ est anisotrope. Par l'absurde, si $y \in \mathscr{C}_{q_{|G}} \setminus \{0\}$, alors $H \oplus (\operatorname{Vect} y) \leq H' \oplus (\operatorname{Vect} y)$ vérifie que la restriction de q est hyperbolique, mais de dimension plus grande, ***absurde !*** On en conclut que $q_{|G}$ est anisotrope.

   On conclut en utilisant le raisonnement pour $V = E$.

Fin du DM.